DISSERTATIO
MATHEMATICA INAUGURALIS,

DE

ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM
PRIMI ORDINIS,
ET DUARUM INDETERMINATARUM
SOLUTIONIBUS PECULIARIBUS,

QUAM,

ANNUENTE DEO OPT. MAX.,

EX AUCTORITATE RECTORIS MAGNIFICI

JOHANNIS-MATTHIÆ SCHRANT,

Phil. Theor. et Litter. Belgic. Profess. Ordin.,

ET

AMPLISSIMI SCIENTIARUM PHYS. ET MATH. ORDINIS DECRETO,

PRO GRADU MAGISTERII ET DOCTORATUS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS ET PRIVILEGIIS,

IN ACADEMIA GANDAVENSI,

RITÈ ET LEGITIMÈ CONSEQUENDIS,

PUBLICÈ DEFENDET

JOHANNES LEMAIRE, *Gandavensis*,

Die 14.ᵃ Aprilis MDCCCXXI, horâ undecimâ.

GANDÆ, TYPIS J.-N. HOUDIN.

VIRO

CLARISSIMO ET ERUDITISSIMO

IGNATIO VAN TOERS,

COMITIORUM IN FLANDRIA ORIENTALI,

NEC NON ACADEMIÆ GANDAVENSIS

AB ACTIS SANCTIORIBUS,

GYMNASII REGII GANDAVENSIS CURATORI,

EQUITI LEONIS BELGICI INSIGNIBUS DECORATO,

IN ANIMI GRATI TESSERAM,

Hasce studiorum primitias,
lubens ac volens dedico

J. LEMAIRE.

PRÆFATIO.

Quanto in pretio immortalis Lagrange solutionum peculiarium theoriam habuerit ex eo dijudicari potest quòd hanc tam fusè in suis de calculo functionum lectionibus pertractaverit. « *Ce point d'analyse*, inquit illustris geometra, *est un des plus intéressans par ses différentes applications* ». Itaque specimen inaugurale, juxta leges academicas, exaraturis ea nobis arrisit materia, tum ob hanc causam, tum quia temporum recentiorum ingenia maximè decora huic perficiendæ allaboraverunt. Etenim Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, quisque suâ viâ in eumdem scopum tetenderunt, amplissimam sic matheseos studiosis discendi materiam suppeditantes. Quorum illustrium virorum scriptis de hâc theoriâ sæpiùs pervolutis, ea quæ solutiones peculiares notatu digniora præberent tractando solas primi ordinis et duarum indeterminatarum æquationes, exponere conati sumus. Tentamini nostro annuant exoptamus clarissimi imprimìs ordinis scientiarum in Academia Gandavensi professores quibus, præter doctrinarum præcepta, tot et tanta accepta referimus.

DE ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM

PRIMI ORDINIS,

ET DUARUM INDETERMINATARUM

SOLUTIONIBUS PECULIARIBUS.

§ 1. Ut solutionum peculiarium theoriam ab ipso fonte repetamus, proposita sit integratio æquationum primi ordinis, quæ induere possunt formam $y=px+P$, ubi per p $\frac{dy}{dx}$ et per P, functio coefficientis $\frac{dy}{dx}$ et constantium designatur. Quâ æquatione differentiatâ, prodit

$$dy=xdp+pdx+\frac{dP}{dp}\,.\,dp.$$

Seu propter $dy=pdx$, $o=dp\left(x+\frac{dP}{dp}\right)$, æquatio cui satisfiet sive per $dp=o$, sive per $x+\frac{dP}{dp}=o$: quæ utraque æquatio primitivam dabit propositæ cui sic duæ primitivæ competent. Ut earum propriùs investigemus naturam, integranda sit æquatio

$$ydx-xdy=a\sqrt{dx^2+dy^2}, \qquad (1)$$

seu

$$y=px+a\sqrt{1+p^2}; \qquad (2)$$

indè eruetur $P=a\sqrt{1+p^2}$ et proindè $\frac{dP}{dp}=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$.

Quùm verò $dp=o$, erit $p=c=$ const. Undè substituto c in (2) prodit

$$y=cx+a\sqrt{1+c^2}$$

nempè primitiva generalis propositæ; constantem enim arbitrariam includit.

Ex $x = \frac{-ap}{\sqrt{1+p^2}}$ deducitur $p = \frac{\pm x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ et $\sqrt{p^2+1} = \mp \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$; quibus valoribus in (2) substitutis, prodit quoque

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

2. Hæc posterior æquatio nullam continet constantem arbitrariam. Æquationi differentiali æquè ac æquatio integralis completa satisfacit, hanc verò non ingreditur, id est, ex eâ elici nequit quemcumque constanti arbitrariæ attribuamus valorem. Itaque essentiâ suâ ab omnibus iis æquationibus differt, quas ex æquatione integrali completâ, variis constanti arbitrariæ attributis valoribus, deducere licet. Eo charactere hujusmodi æquationes definiri possunt et complures quidem geometræ indè profecti sunt *solutionum peculiarium* problema enodaturi; sic enim æquationes, quas modò definivimus generatìm, auctore Laplace vocantur, qui primus problema solvit. Lagrange verò eas primùm æquationes integrales peculiares vocaverat, nomen solutionum peculiarium variis æquationis integralis completæ casibus assignans. Sed, ut benè Lacroix animadvertit, æquationes primitivæ quibus licet ex æquatione integrali completâ non eliciendis æquationes differentiales solvuntur, quùm nullâ integrandi methodo obtineantur, nomen necessariò respuunt quo tales methodi in mentem revocantur.

3. Quùm non desint cujusvis ordinis æquationes differentiales quibus, præter æquationem integralem completam ordinis inferioris, solutiones peculiares ejusdem ordinis competant, *solutionem* æquationis differentialis ordinis cujuscumque vocabimus æquationem ordinis inferioris, quâ æquationi differentiali satisfit; *æquationem integralem particularem*, solutionem quæ prætereà integrale completum ingredietur, *solutionem* deniquè *peculiarem*, solutionem huic non inclusam.

4. Si æquatio quædam ad hanc formam reduci queat $Mdx + Ndy$, ubi $M = \mu P$, $N = \mu Q$ et sit μ functio indeterminatarum x et y simul, seu solius x seu solius y, patet $\mu = 0$ considerari posse tanquàm solutionem peculiarem æquationis propositæ, quippè quæ prodit sub formâ $\mu(Pdx + Qdy) = 0$. Porrò ejusmodi solutiones inventum iri determinando factores quantitatibus M et N communes manifestum est.

5. Diù geometræ ejusmodi solutiones peculiares tanquàm generis ab eo diversi considerarunt cui competit ea quam §. 1 vidimus, quia vinculo minus arcto

æquationi differentiali propriè sic dictæ, id est, æquationi differentiali sub formâ $dy = pdx$ positæ connecti videntur. Seriùs autem videbimus solutiones peculiares perperàm eo respectu distingui, quia ab æquatione suâ differentiali quævis solutio peculiaris, effectâ quâdam indeterminatarum mutatione, tanquàm factor separari potest.

6. Ubi integrandi methodis existentia solutionum peculiarium constiterat § (1), maximi momenti factum est assignare rationes quibus ejusmodi solutiones connectuntur cum integralibus completis quibus non includuntur, tum æquationibus differentialibus quas solvunt. Problemata generalia eatenùs proponenda sequenti verborum circuitu concipi possunt.

I. Ex integrali completo æquationis differentialis ordinis cujuscumque et quotcumque indeterminatarum eruere solutiones peculiares quæ huic satisfaciant.

II. Datâ æquatione differentiali ordinis cujuscumque et quotcumque indeterminatarum, latente integrali completo,

1.° Determinare utrùm æquatio ordinis inferioris quæ datæ æquationi satisfacit, integrale completum ingrediatur, an secùs.

2.° Determinare cunctas æquationis datæ solutiones peculiares.

7. Quùm verò in hâc nostrâ dissertatione nullas nisi primi ordinis et duarum indeterminatarum æquationes differentiales pertractandas nobis proposuerimus, ea problemata sequenti modo circumscribentur.

I. Ex integrali completo æquationis primi ordinis et duarum indeterminatarum, hujus solutiones peculiares eruere.

II. Datâ æquatione primi ordinis et duarum indeterminatarum, latente integrali,

1.° Determinare utrùm æquatio finita quâ solvitur, æquationem integralem ingrediatur, an secùs.

2.° Determinare cunctas hujus solutiones peculiares.

8. Quibus problematibus dissertatio nostra in duas partes dividetur, quibus tertiam subjungemus de solutionum peculiarium significatione geometricâ.

PROBLEMA I.

Ex æquatione integrali completâ æquationis primi ordinis et duarum indeterminatarum, eruere solutiones peculiares æquationi differentiali satisfacientes.

9. Æquatio differentialis primi ordinis et duarum indeterminatarum semper pro-

dire potest sub formâ $dy - pdx = 0$. Sit γ factor quo multiplicanda sit quantitas $dy - pdx$ ut fiat differentiale exactum, sitque $\mu = 0$ solutio peculiaris propositæ, erit $\gamma dy - \gamma pdx = df\,(x, y)$: quùm verò μ sit generatìm functio indeterminatarum x et y, erit quoque $y = \phi\,(x, \mu)$, et proindè $\gamma dy - \gamma pdx = df\,[x, \phi(x, \mu)] = d.\mathrm{F}(x, \mu)$. Integrando, erit $\mathrm{F}(x, \mu) + \mathrm{C} = 0$ integrale completum propositæ, C in constantem arbitrariam assumpto. Nunc, quùm $\mu = 0$ sit solutio peculiaris propositæ delere nequit $\mathrm{F}(x, \mu) + \mathrm{C}$, quocumque valore C donetur, neque ergo delebit $\gamma(dy - pdx)$ differentiale hujus quantitatis; at, quatenùs est solutio peculiaris delet $dy - pdx$, faciet ergo $\gamma = \infty$ seu, quod eodem recidit, faciet $\frac{1}{\gamma} = 0$. Sic ferè Laplace hanc propositionem demonstravit, ad quam aliâ viâ Condorcet pervenerat.

10. Quo posito, reliquum est cognoscere γ quod nullius operæ est, cognitâ æquatione integrali completâ. Nam demonstravit Lagrange (*Leçon treizième sur le Calcul des fonctions*) prius membrum æquationis $\frac{d^n\gamma}{dx^n} + \mathrm{P} = 0$, ubi per P functionem quantitatum $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ intelligi vult, in differentiale exactum converti si multiplicetur per $\frac{d\mathrm{V}}{d\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}} : \frac{d\mathrm{V}}{da}$. Ubi æquatio erit $dy - pdx = 0$ factorem fieri $\frac{d\mathrm{V}}{dy} : \frac{d\mathrm{V}}{da} = \gamma$ manifestum est. $\mathrm{V} = 0$ est æquatio integralis completa propositæ et a constans arbitraria. γ innumeros habet valores, quod Lagrange ibidem demonstravit; sed scopo nostro sufficit valor simplicissimus $\frac{d\mathrm{V}}{dy} : \frac{d\mathrm{V}}{da}$.

11. Cognito γ, determinandi sunt omnes factores quantitatis $\frac{1}{\gamma}$ qui cyphræ adæquati solvunt æquationem $dy - pdx = 0$. Sit ergo μ unus factorum; positâ æquatione $\mu = 0$, differentiale quantitatis $\frac{1}{\gamma}$ fiet 0, seu erit $dy - \pi dx = 0$. Sed, ex hypothesi, posito $\mu = 0$ evanescit quoque quantitas $dy - pdx$; evanescit ergo differentia $\pi - p$. Itaque rei difficultas in eo vertitur ut factores quantitatibus $\frac{1}{\gamma}$ et $\mu - p$ communes assignentur : quod analyseos algebraïcæ ditionis est. Horum factorum quisque cyphræ adæquatus erit solutio æquationis $dy - pdx = 0$.

Hoc enim posito, evanescent quantitates $dy - \pi dx$ et $\pi dx - pdx$, et proindè earum summa $dy - pdx$. Deindè nullâ operâ patebit quinam factorum cyphræ adæquati æquationes integrales particulares sint, quinam solutiones peculiares.

12. Exemplo sit æquatio $y = 2ax - a^2$. Hujus æquatio differentialis primi ordinis est

$$dy = [\,2x \pm 2\sqrt{(x^2 - y)}\,]\ dx.$$

Ergo

$$p = 2x \pm 2\sqrt{(x^2 - y)}$$

Ex æquatione eruitur

$$\frac{dV}{dy} = 1 \text{ et } \frac{dV}{da} = -x + a = \pm\sqrt{x^2 - y}$$

substituto valore quantitatis a ex propositâ elicito.

Erit ergo

$$\gamma = \frac{dV}{dy} : \frac{dV}{da} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - y}}$$

undè

$$\frac{1}{\gamma} = \pm\sqrt{x^2 - y} = 0 \text{ et proindè } x^2 - y = 0$$

Differentiatâ quantitate $x^2 - y$, prodit $2xdx - dy$, et idcircò $\pi = 2x$; undè emergit

$$\pi - p = \mp 2\sqrt{x^2 - y}$$

atqui manifestum est quantitatibus $\frac{1}{\gamma}$ et $\pi - p$ factorem esse communem $\sqrt{x^2 - y}$; $x^2 - y = 0$ est solutio æquationis differentialis propositæ; quùm verò ex integrali elici nequeat, est solutio peculiaris.

13. Via quam modò inivimus problemati nostro non omninò respondet propterea quòd supponit cognosci æquationem differentialem propositæ, dùm solutio peculiaris ex solâ æquatione integrali erui deberet. Quod quidem docuit Lagrange (*Leçon quatorzième sur le Calcul des fonctions*) ratione ferè sequenti.

Sit $U = 0$ æquatio differentialis duarum indeterminatarum primi ordinis, id est, in quâ U functio est quantitatum x, y, $\frac{dy}{dx}$, et quæ emersit ex eliminatione constantis arbitrariæ a inter æquationem integralem $V = 0$ et ipsius differentialem $\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}.\frac{dy}{dx} = 0$ (1). Consideremus in æquatione $V = 0$ constantem arbitrariam a ut indeterminatam functionem quantitatis x; tunc differentiale æquationis $V = 0$, fit

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}.\frac{dy}{dx} + \frac{dV}{da}.\frac{da}{dx} = 0 \ (2).$$

Manifestum est ex eliminatione quantitatis a inter $V=o$ et (1), idem emersurum atque ex eliminatione ejusdem quantitatis inter $V=o$ et (2), dummodò valeat conditio $\frac{dV}{da}.\frac{da}{dx}=o$, cui satisfacit $\frac{da}{dx}=o$ æquè ac $\frac{dV}{da}=o$. $\frac{da}{dx}=o$ suppeditat $a=\text{const.}$ Qui casus est integralis completi. Æquatio $\frac{dV}{da}=o$ integrata generatìm suppeditabit pro quantitate a functionem indeterminatarum x et y quæ in $V=o$ substituta dabit æquationem primitivam constanti arbitrariâ carentem, quæ idcircò solutio peculiaris erit. Itaque ex integrali completo æquationis differentialis solutiones peculiares deducturus integrale differentiet quoad quantitatem a ut functionem indeterminatæ x consideratam, faciatque $\frac{da}{dx}=o$; valores constantis arbitrariæ inde manantes in $V=o$ substituti solutiones peculiares dabunt. Exemplo sit æquatio integralis $y=2ax-a^2$.

Erit $$V=y-2ax+a^2=o.$$

Undè $$\frac{dV}{da}=-2x+2a=-x+a=o \text{ et } a=x,$$

qui valor quantitatis a in integrali substitutus dat solutionem peculiarem $x^2-y=o$ jam cognitam.

14. Ex iis quæ præcedunt patet solutionum peculiarium essentiam in eo consistere quòd valor quantitatis a functio est indeterminata. Quotiescumque igitur æquatio $\frac{dV}{da}=o$ ope cujus a determinatur, pro eâ quantitate valorem suppeditat constantem vel talem functionem quantitatum x et y quæ fiat constans propter $V=o$, nullus solutionibus peculiaribus locus est; æquatio autem quæ prodit nihil est præter integrale particulare. (*Lagrange, quatorzième leçon sur le Calcul des fonctions.*)

15. In theoriâ æquationum generali demonstratum est æquationi $\frac{dv}{da}=o$ inesse legem sub quâ æquatio $V=o$, quoad a ordinata duas habet radices æquales. Si ergo in $V=o$ substituatur valor quantitatis x seu y è solutione peculiari elicitus, æquatio $V=o$ adipiscetur duas radices æquales pro a. Reverà solutio peculiaris $y=x^2$ adducit æquationem $y-2ax+a^2=o$ ad formam $(x-a)^2=o$.

16. Nunc manifestius est factorem æquationis differentiatìm fieri infinitum per

solutiones peculiares. Nam factor ille generatìm erit $\phi a \, . \, \frac{dV}{dy} : \frac{dV}{da}$ ubi patet infinitesimum oriri ex conditione $\frac{dV}{da} = 0$, undè solutiones peculiares emergunt. Liquet etiam quare dici nequeat quamlibet functionem quæ cyphræ ædæquata factorem infinitum facit, solutionem peculiarem esse. Nam factis ϕa vel $\frac{dV}{da}$ infinitis fit quoque factor infinitus, quin quidquam de $\frac{dV}{da} = 0$ pronuncietur.

17. Si prodeat æquatio integralis sub formâ $\phi(x, y) = a$, ubi a est constans arbitraria, et substituatur $\phi(x, y)$ quantitati a in $V = 0$, æquatio emergens erit identica cum $V = 0$, et differentiata porriget, designando per solam literam ϕ functionem $\phi(x, y)$,

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{d\phi} \, . \, \frac{d\phi}{dx} = 0, \quad \text{undè} \quad \frac{d\phi}{dx} = - \frac{dV}{dx} : \frac{dV}{d\phi}$$

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{d\phi} \, . \, \frac{d\phi}{dy} = 0, \quad \text{undè} \quad \frac{d\phi}{dy} = - \frac{dV}{dy} : \frac{dV}{d\phi}.$$

At $\frac{dV}{d\phi}$ seu $\frac{dV}{da}$ evanescit per solutionem peculiarem. Ergo solutio peculiaris facit semper coefficientes differentiales $\frac{d\phi}{dx}$ et $\frac{d\phi}{dy}$ infinitos. Undè nova patet via tales solutiones inveniendi.

Sit, ex. g., æquatio $y = ax + \sqrt{(1 + a^2)}$; indè deducitur

$$a = \phi = - \frac{xy}{1 - x^2} \pm \frac{\sqrt{y^2 + x^2 - 1}}{1 + x^2}, \quad \frac{d\phi}{dx} = - \frac{1 + x^2 y}{(1 - x^2)^2} \pm \frac{x}{(1 - x^2)\sqrt{(y^2 + x^2 - 1)}}$$

$$\mp \frac{2x\sqrt{(y^2 + x^2 - 1)}}{(1 - x^2)^2} \quad \frac{d\phi}{dy} = - \frac{x}{1 - x^2} \pm \frac{y}{(1 - x^2)\sqrt{(y^2 + x^2 - 1)}};$$

æquatio $y^2 + x^2 - 1 = 0$, quâ positâ coefficientes differentiales infiniti evadunt est igitur solutio peculiaris æquationis differentialis ad propositam pertinentis.

PROBLEMATIS II

PARS PRIOR.

Determinare utrùm solutio $\mu = 0$ datæ æquationis differentialis solutio peculiaris sit nec ne, id est, utrùm insit integrali an secùs.

18. Sit $\phi = 0$ integrale completum. Imaginemur curvas per $\phi = 0$ et $\mu = 0$

repræsentatas communis originis respectu constructas sese intersecare puncto M vocato, cujus abscissa sit x, applicita y. Si nullum præter illud punctum habeant commune, abscissa x incremento quodam h aucta, ordinata curvæ $\phi = 0$ ad novam abscissam erit Y, ordinata verò curvæ $\mu = 0$, y' ab Y generatim diversa. Quo posito, si solvantur quoad y æquationes $\phi = 0$ et $\mu = 0$, erit $y = \mathrm{F}x$, $y = fx$, et ex theoremate Tayloris eruetur

$$\mathrm{Y} = y + \frac{h}{1}\,\frac{d\mathrm{F}x}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\,\frac{d^2\mathrm{F}x}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3\mathrm{F}x}{dx^3} + \text{etc.},$$

$$y' = y + \frac{h}{1}\,\frac{dfx}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\,\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\,\frac{d^3fx}{dx^3} + \text{etc.}$$

Ut $\mu = 0$ sit integrale particulare, seu, aliis verbis, ut curvæ $\phi = 0$ et $\mu = 0$ omnibus punctis coincidant, oportet ut sit $\mathrm{Y} = y'$, qualecumque sit incrementum h. Quo requiritur ut ad punctum intersectionis curvarum obtineant æquaquationes $\frac{d\mathrm{F}x}{dx} = \frac{dfx}{dx}$ $\frac{d^2\mathrm{F}x}{dx^2} = \frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{d^3\mathrm{F}x}{dx^3} = \frac{d^3fx}{dx^3}$, etc.; imò eædem æquationes valeant oportet pro alio quocumque puncto M′ curvæ $\mu = 0$; nam constans arbitraria quâ sola varii integralis generalis casus inter se differunt non ingreditur quantitates $\frac{d\mathrm{F}x}{dx}$, $\frac{d^2\mathrm{F}x}{dx^2}$, $\frac{d^3\mathrm{F}x}{dx^3}$, etc. Solutio data $\mu = 0$ æquationis differentialis erit igitur integrale particulare ubi iis æquationibus satisfaciet. Quod an locum habeat dijudicari potest latente etiam integrali completo; nam ex $\mu = 0$ nullâ operâ eruuntur valores quantitatum $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, etc. Ex $dy = pdx$ quoque eliciuntur $\frac{d\mathrm{F}x}{dx}$, $\frac{d^2\mathrm{F}x}{dx^2}$, etc., nam $\frac{d\mathrm{F}x}{dx} = p$, et proindè $\frac{d^2\mathrm{F}x}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, et sic porrò. Si designentur $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, etc., per ν, ν', ν'', etc., et $\frac{d\mathrm{F}x}{dx}$, $\frac{d^2\mathrm{F}x}{dx^2}$, etc., per p, p', p'', etc., æquationes quibus satisfieri debet ut $\mu = 0$ sit integrale particulare evadent $\nu - p = 0$, $\nu' - p' = 0$, etc. Ex iis igitur æquationibus erui debet character quo innotescet utrùm solutio data $\mu = 0$ integrale particulare sit an secùs. At ex hypothesi $\mu = 0$ est solutio, id est, primæ æquationi satisfactum est; è sequentibus igitur character emerget. Quo posito, supponatur æquationem simplicissimam $y = 0$ esse solutionem æquationis $dy = pdx$. In eo casu $\nu = 0$, $\nu' = 0$, $\nu'' = 0$, et sic porrò. Ut igitur $y = 0$ sit integrale parti-

culare, habeatur oportet $-p'=0$, $-p''=0$, $-p'''=0$, et sic porrò. Haud magnæ molis est tunc assignare formam necessariam quantitatis p. Quùm enim p evanescat, posito $y=0$, ipsius forma necessariò erit y^nq, ubi n numerus est positivus, q verò quantitas finita licet $y=0$. Nunc utrùm n sit major minorve unitate an unitati æqualis videamus. Quem ad finem, evolvatur y^nq in serie ascendenti quoad y; erit

$$y^nq=p=y^n\,X+y^{n'}\,X'+y^{n''}\,X''+\text{, etc., (1)}$$

ubi n, n', n'' sunt numeri necessariò positivi, et X, X', X'', functiones quantitatis x. Si differentietur p in seriem reducta, emerget

$$\frac{dp}{dx}=\frac{d^2Fx}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\left(ny^{n-1}\,X+n'y^{n'-1}\,X'+n''y^{n''-1}\,X''+\text{etc.}\right),$$

$$+y^n\,\frac{dX}{dx}+y^{n'}\,\frac{dX'}{dx}+\text{etc.},$$

ubi si in locum p substituatur series (1), prodit

$$\frac{d^2Fx}{dx^2}=ny^{2n-1}\,X^2+(n+n')\,y^{n+n'-1}\,XX'+\text{, etc. ....}+y^n\,\frac{dX}{dx}+\text{etc.}$$

similiter invenietur

$$\frac{d^3Fx}{dx^3}=n\,(2n-1)\,y^{3n-2}\,X^3+\text{etc.}$$

E solâ inspectione primorum terminorum concludatur necesse est quantitates p', p'', p''', etc. omnes evanescere non posse nisi posito $n=1$ vel $n>1$. Si foret $n<1$, æquationes $-p'=0$, $-p''=0$, $-p'''=0$, etc., non omnes solverentur. Undè concludetur æquationem $y=0$ quæ satisfacit æquationi $dy=pdx$ integrale particulare fore quùm p induere poterit formam y^nq, ubi $n=1$ vel $n>1$; q verò quantitas finita manens posito $y=0$. Si $n<1$, erit $y=0$ solutio peculiaris.

19. Eulerus, §. 267 suæ Mechanices, quùm solutionibus peculiaribus nondùm operam navasset viâ admodùm indirectâ, ut ibidem videre licet, æquationi $dx=\frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{gy}}$ solutionem esse peculiarem $y=0$ invenit. Quod è præcedenti theoriâ concludere facillimum est. Potest enim æquatio modò allata prodire sub formâ $\frac{dy}{dx}=p=y^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{g}{b}}$. Comparatione inter p et y^nq institutâ, patet esse $n<1$. Ergo $y=0$ est solutio peculiaris æquationis $dx\sqrt{gy}=dy\sqrt{b}$.

20. Hæc via discernendi utrùm æquatio $y=0$ quæ satisfacit æquationi $dy=pdx$

integrale particulare sit an secùs, simplicissima est. Ad eam reduci potest casus ubi solutio data $\mu = 0$ generatim functio est indeterminatarum x et y. Etenim ponatur $\mu = 0$ sub formâ $y = X$. Quùm ex hypothesi hæc æquatio satisfaciat æquationi $dy = pdx$, erit $dX = Pdx$, ubi per P intelligi debet quod fit p, mutato y in X. Quâ posteriori æquatione substractâ a priori, prodit

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dX}{dx} = p - P$$

æquatio cujus membrum utrumque, posito $y = X$ evanescet. Erit igitur posterius $p - P$ formæ $Q\,(y - X)^n$, ubi Q quantitas finita manet posito $y = X$, et n numerus est positivus. Ergo æquatio differentialis evadit

$$dy = \frac{dX}{dx}\,dx + Q\,(y - X)^n\,dx = [P + Q\,(y - X)^n]\,dx.$$

Si fiat $y - X = \mu$ præcedens æquatio mutatur in hanc

$$d\mu = Q\mu^n\,dx$$

observando esse $dy = dX + d\mu$. Instituto nunc pro $\mu = 0$ et $Q\mu^n$ eodem ratiocinio quod instituimus pro $y = 0$ et $y^n q$, §. 18, manifestum est $\mu = 0$ integrale particulare fore quotiescumque habebitur $n = 1$ seu $n > 1$. Quod si esset $n < 1$, foret $\mu = 0$ solutio peculiaris. Exemplo sit æquatio differentialis.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm 2\sqrt{(x^2 - y)}.$$

Cui quùm satisfaciat æquatio $x^2 - y = 0$, fit præsenti casu $\mu = x^2 - y = 0$, videamus an μ integrale sit particulare an solutio peculiaris. Ex $x^2 - y = 0$ differentiando elicitur $\frac{d\mu}{dx} = 2x - \frac{dy}{dx}$, et substituto valore quantitatis $\frac{dy}{dx}$ erit $\frac{d\mu}{dx}$ $= 2x - 2x \mp 2\sqrt{(x^2 - y)} = \mp 2\,(x^2 - y)^{\frac{1}{2}} = Q\mu^n = 2\mu^{\frac{1}{2}}$. Quùm sit $n = \frac{1}{2}$, $x^2 - y = 0$ datæ æquationis solutio est peculiaris.

21. Hæc methodus agnoscendi an data quælibet solutio peculiaris sit nec ne quùm non ita brevis sit facilisque applicationis, quærendus est solutionum peculiarium magis eminens character. Ad hunc scopum prodeat denuò æquatio $d\mu = Q\mu^n dx$, atque evolvatur $Q\mu^n$ in serie ascendenti quoad μ^n; erit

$$\frac{d\mu}{dx} = Q\mu^n = \mu^n f + \mu^{n'} f' + \mu^{n''} f'' + \text{etc.}$$

designatis per f, f', f'' etc. functionibus quantitatis x. Utroque hujus æquationis membro quoad solam indeterminatam x differentiato, prodit, observando esse

$$\frac{dQ\mu^n}{dx} = \frac{d\left(\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\mu}{dy}p\right)}{dx};$$

$$\frac{d\left(\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\mu}{dy}p\right)}{dx} = n\mu^{n-1} f \cdot \frac{d\mu}{dx} + \mu^n \frac{df}{dx} + \text{etc.}$$

Posito $n<1$, id est, in casu solutionis peculiaris, alterum hujus æquationis membrum fit infinitum per $\mu=0$. Undè concludatur necesse est æquatione $\mu=0$, si sit solutio peculiaris, ad infinitesimum reduci differentiale quantitatis $\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\mu}{dy}p$ pro solâ indeterminatâ x sumptum et per dx divisum. Atqui hoc differentiale per dx divisum est.

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{d^2\mu}{dydx}p + \frac{d\mu}{dy}\,\frac{dp}{dx}.$$

In casu solutionis peculiaris fit infinitum, seu, quod eodem recidit, habetur

$$1 : \frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{d^2\mu}{dydx}p + \frac{d\mu}{dy}\,\frac{dp}{dx} = 0.$$

Sit, ex. g., æquatio differentialis $\frac{dy}{dx} = p = \frac{-x}{y - \sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}$. Hujus æquationis solutio est $x^2+y^2-a^2=0$. Videamus an solutionum peculiarium charactere insigniatur. Primum è $\mu = x^2+y^2-a^2=0$, eruetur $d\mu = xdx + ydy$ et

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = 1 \qquad \frac{d^2\mu}{dxdy} = 0 \qquad \frac{d\mu}{dy} = y.$$

E datâ æquatione quoque deducitur

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-[y\sqrt{(x^2+y^2-a^2)} + (x^2+y^2-a^2) + x^2]}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}\,[y-\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}]}.$$

Erit igitur

$$1 : \frac{d^2\mu}{dx^2} + p\frac{d^2\mu}{dxdy} + \frac{dp}{dx}\,\frac{d\mu}{dy}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}\,[y-\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}]}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}\,[y-\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}] - y\,[y\sqrt{(x^2+y^2-a^2)} + (x^2+y^2-a^2)+x^2]};$$

quæ quantitas, posito $\mu=0$, evanescit. Ergo, etc.

Quùm facile sit hanc methodum adtemperare casui ubi μ functio est indeterminatæ x vel y solius, non ampliùs hisce immorabimur.

PARS ALTERA.

Datâ æquatione differentiali primi ordinis, determinare omnes solutiones peculiares.

22. Ut hanc problematis nostri partem solvamus, prodeat denuò æquatio differentialis primi ordinis sub formâ $d\mu = \mu^n Q dx$, ubi n numerus est < 1 in casu solutionis peculiaris. At propter $d\mu = \frac{d\mu}{dx} dx + \frac{d\mu}{dy} dy$, et $dy = pdx$, est

$$\frac{d\mu}{dy} dy = d\mu - \frac{d\mu}{dx} dx \text{ et } p = \frac{\mu^n Q}{\frac{d\mu}{dy}} - \frac{\frac{d\mu}{dx}}{\frac{d\mu}{dy}}.$$

Quo posito, nihil impedit quominùs μ sumat formam $y - X$, per X ut anteà functione quantitatis x intellectâ. Erit tùm $\frac{d\mu}{dy} = 1$ et $-\frac{d\mu}{dy} = \frac{dX}{dx}$. Substituto in quantitate Q indeterminatæ y hujus valore $X + \mu$, evolvatur Q in serie ascendenti quoad μ : erit

$$Q = f + \mu^{n'} f' + \text{etc.},$$

ubi per f, f' designantur functiones indeterminatæ x solius. Quâ serie in p seu $\mu^n Q + \frac{dX}{dx}$ substituta, emergit

$$p = \frac{dX}{dx} + \mu^n f + \mu^{n+n'} f' + \text{etc.}$$

Ex hâc æquatione quoad y differentiatâ, elicitur

$$\frac{dp}{dy} = n\mu^{n-1} \frac{d\mu}{dy} f + (n + n') \mu^{n+n'-1} \frac{d\mu}{dy} f' + \text{etc.}$$

seu propter $\frac{d\mu}{dy} = 1$,

$$\frac{dp}{dy} = n\mu^{n-1} f + (n + n') \mu^{n+n'-1} f' + \text{etc.}$$

In præsenti casu, id est, positâ $\mu = 0$ solutione peculiari, patet $\frac{dp}{dy}$ fieri ∞. Positâ ergo æquatione $\mu = 0$, evanescit quantitas $\frac{1}{\frac{dp}{dy}}$, seu, quod eodem redit,

μ est factor hujus quantitatis. Haud majoris foret molis probare esse μ quoque factorem quantitati $\frac{1}{\frac{dp}{dx}}$. Nunc ut inveniatur ille factor, differentietur æquatio $\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = 0$. Undè ponatur emergere $dy = \pi dx$. Patet huic æquationi satisfieri per $\mu = 0$; at per $\mu = 0$ satisfit etiam æquationi $dy = pdx$. Ergo, posito $\mu = 0$, evanescet differentia $p - \pi$. Undè manat μ factorem esse communem quantitatibus $\frac{1}{\frac{dp}{dy}}$ et $p - \pi$; id est, positâ solutione peculiari $\mu = 0$, has quantitates fieri o. Invertendo dicere possumus factorem quemlibet quantitatibus $\frac{1}{\frac{dp}{dy}}$ et $p - \pi$ communem, solutionem esse peculiarem. Etenim factor ille delet quantitates $dy - \pi dx$ et $pdx - \pi dx$; delet igitur earum quoque differentiam nempè $dy - pdx$. Quùm cæterum reddat coefficientem $\frac{dp}{dy}$ infinitum, nihil nisi solutio peculiaris esse potest. Si differentietur æquatio $\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = 0$, prodit

$$dy - \frac{\frac{d^2p}{dydx}}{\frac{d^2p}{dy^2}}\, dx = 0;\ \text{undè}\ \pi = -\frac{\frac{d^2p}{dydx}}{\frac{d^2p}{dy^2}}.$$

Applicemus quæ præcedunt ad æquationem differentialem jam tractatam $dy = [2x \pm 2\sqrt{(x^2-y)}]^2\, dx$. Ex eâ eruitur $\frac{dy}{dx} = p = 2x \pm \sqrt{(x^2-y)}$; $\frac{dp}{dy} = \mp \frac{1}{2\sqrt{(x^2-y)}}$; $\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = \mp 2\sqrt{(x^2-y)}$ $\frac{d^2p}{dydx} = \pm \frac{x}{2\sqrt{(x^2-y)}(x^2-y)}$ $\frac{d^2x}{dy} = \mp \frac{1}{4\sqrt{(x^2-y)}(x^2-y)}$. Ergo $\pi = 2x$ et $p - \pi = \pm\sqrt{(x^2-y)}$. Ergo $x^2 - y = 0$ est solutio peculiaris æquationis propositæ ut jam videramus, et solutio peculiaris est unica.

23. Methodus § præc. exposita omnibus numeris absoluta esset si pro casu etiam valeret ubi solutio peculiaris functio est sive x, sive y solius. At tunc sequenti ratione determinatur. Ponatur primùm μ functio solius y: dabit æquatio

$\mu = 0$, $dy = 0$; ergo erit quoque $p = 0$, p habente formam $\mu^n Q$; Q verò designante quod suprà. Quùm sit μ functio indeterminatæ y, erit contrà y functio quantitatis μ, Q autem ut functio quantitatum x et μ poterit considerari. Quo posito, evolvatur p in serie ascendenti quoad μ; erit

$$p = \mu^n . f + \mu^{n+n'} f' + \text{etc.},$$

designatis per f, f', functionibus indeterminatæ x solius. Hujus æquationis differentiale quoad y est

$$\frac{dp}{dy} = n\mu^{n-1} \frac{d\mu}{dy} f + \text{etc.}$$

Ergo, quùm posito $n < 1$, $\frac{dp}{dy}$ fiat ∞ per $\mu = 0$, patet per solutionem peculiarem ubi functio est solius y, $\frac{dp}{dy}$ necessariò fieri ∞ seu evanescere quantitatem $\frac{1}{\frac{dp}{dy}}$. Quùm verò positâ tali solutione evanescat quoque p, concludetur contra quemlibet factorem quantitatibus p et $\frac{1}{\frac{dp}{dy}}$ communem daturum esse solutionem peculiarem, si sit functio solius y. Si μ sit functio solius x, instituetur idem ratiocinium, proficiscendo ab æquatione $dx = \frac{1}{p} dy$. Patebit quamlibet solutionem peculiarem functionem solius x factorem esse communem quantitatibus $\frac{1}{p}$ et $\frac{p^2}{\frac{dp}{dx}}$ et contrà quemlibet factorem his quantitatibus communem et functionem solius x esse solutionem peculiarem æquationis $dy = pdx$.

24. Nulla functio algebraïca differentiatione acquirere potest denominatorem et dare proindè $\frac{dp}{dy} = \infty$, dùm quantitas p finita manet, nisi talis quæ terminos contineat signo radicali affectos. Indè manat è radicalibus æquationi differentiali inclusis petendas esse solutiones peculiares, hujusmodi functiones cyphræ adæquando, et dijudicando an æquationi datæ satisfaciant. Lagrange qui primus nexum solutionum peculiarium cum valoribus theoremati Tayloris non submissis animadvertit, iis nomina analogiam quamdam innuentia tribuit; quippè qui illas æquationes primitivas singulares, hos valores singulares vocavit.

25. E theoriâ modò expositâ sequitur quamlibet æquationem differentialem cui solutio peculiaris competit sub formâ prodire posse

$$d\mu + \mu^n Q dx = 0,$$

ubi $\mu = 0$ est solutio peculiaris, Q verò generatìm functio indeterminatarum x et y quæ nec o nec infinita evadit posito $\mu = 0$. Quæ æquatio, observando esse $\frac{d\mu}{\mu^n} = \mu^{-n} d\mu$ differentiale quantitatis $\frac{\mu^{1-n}}{1-n}$, transformari potest in hanc

$$\mu^n \left(d. \frac{\mu^{1-n}}{1-n} + Q dx \right) = 0,$$

seu, si ponatur $\mu^{1-n} = z$ et proindè $\mu^n = z^{\frac{n}{1-n}}$, in hanc

$$z^{\frac{n}{1-n}} (dz + Q dx) = 0.$$

Atqui patet hanc æquationem in duas abire, quarum altera est $z = 0$ seu solutio peculiaris, altera verò æquatio differentialis cui solutio peculiaris non satisfacit. Patet, ubi $n > 1$ seu $n = 1$ solutionem $\mu = 0$ quæ tunc est integrale particulare separari non posse ab æquatione differentiali. Legendre primus hanc separationem animadvertit. Prodeat denuò ut exemplum æquatio differentialis $dy = (2x \pm 2\sqrt{x^2 - y})\, dx$. Hujus solutio peculiaris est $x^2 - y = 0$. Fiat $x^2 - y = z^2$. Erit tùm æquatio differentialis $z\,(dz \pm dx) = 0$. Ergo etc.

26. Nunc quidem demonstratum est æquationem differentialem cui solutio peculiaris competit semper in duos factores abire posse, quorum alter est solutio peculiaris, alter verò æquatio differentialis cui solutio peculiaris non satisfacit; at ut talis factorum separatio fieri queat, cognoscatur oportet solutio peculiaris. Ergo reliquum est ut methodus indicetur factorum separationem perpetrandi, latente etiam solutione peculiari. Sit $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ æquatio differentialis proposita, et $y = \phi(x, z)$, ubi ϕ functio est determinanda ratione quæ scopo nostro idonea sit, z verò indeterminata quæ indeterminatæ y substituitur. Liquet, si ponatur ϕ pro $\phi(x, z)$ fore tùm,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d\phi}{dx}.$$

Undè

$$\frac{d\phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d\phi}{dx} - P = 0 \ldots (1).$$

ubi P est quod fit quantitas $\frac{dy}{dx}$ quùm in eà substituitur $\phi(x, z)$ quantitati y, seu $f(x, \phi)$. Prius hujusce æquationis membrum in duos factores viâ simplicissimâ abibit, si ponatur $\frac{d\phi}{dx} - P = o$, seu $\frac{d\phi}{dx} = f(x, \phi)$. Quo requiritur ut sumatur pro æquatione $y = \phi(x, z)$, integrale completum æquationis propositæ. Sic satisfiet æquationi (1) per conditiones $\frac{dz}{dx} = o$, $\frac{d\phi}{dz} = o$. Hæc eodem ducit quo æquatio $\frac{dV}{da} = o$, §. 13. Ergo in theoriam illustris Lagrange recidimus et separationem solutionis peculiaris effecturus cognoscere quâlibet ratione solutionem peculiarem necessariò debet.

27. Nonnunquàm utilissimum est æquationem differentialem solutionibus peculiaribus liberare. *Car en général*, inquit Poisson, *les solutions particulières dont une équation différentielle se trouve compliquée, sont un obstacle à l'intégration : en faisant disparaître ces solutions, on restreint en quelque sorte l'étude de l'équation différentielle ; elle prend une forme plus simple, et souvent cette préparation suffit pour qu'on puisse l'intégrer.* (Jour. Polyt., XIII cah.) Videantur ibidem exempla.

28. Demonstratum est posse semper, mutando indeterminatam, æquationem differentialem solutionibus peculiaribus liberari. Dici contrà potest in æquationem differentialem introduci semper posse solutionem quamlibet peculiarem, multiplicando æquationem differentialem per factorem qui solutionem peculiarem datam contineat et efficiendo deinceps indeterminatarum mutationem. Eâdem indeterminatarum mutatione in integrali propositæ effectâ, prodibit integrale novæ æquationis differentialis. At eo integrale nihil nisi novam formam induit, nulloque novo factore implicatur, id est, solutionem in æquationem differentialem introductam non recipit. Sit quidem æquatio $dy - pdx = o$ ubi p data functio est indeterminatarum x et y, sitque propositum in eam introducere solutionem peculiarem $u = o$, designatâ per u functione earumdem indeterminatarum ad libitum sumptâ. Quod ut fiat, multiplicetur proposita per u; prodit $udy - updx = o$. Sit z nova indeterminata functio indeterminatarum x et y, cujus differentiale quoad y sit udy; erit differentiale quantitatis z quoad x, $dx \cdot \int \frac{du}{dx} \cdot dy$,

et proindè differentiale integrum erit $dz = udy + dx \int \frac{du}{dx} \quad dy$ (1). Ergo erit

$$dz - dx \left(up + \int \frac{du}{dx} \quad dy \right) = 0 . \ (2)$$

Integratâ æquatione (1) prodibit valor quantitatis z per x et y expressus, eritque valor quantitatis y functio indeterminatarum x et z. Qui in æquatione (2) surrogatus hanc transformabit in æquationem differentialem quæ functio erit indeterminatarum x et z cui satisfiet per omnes æquationes finitas quæ satisfaciebant æquationi $dy - pdx = 0$, et præthereà per solutionem peculiarem $u = 0$. Quæ ut omnia exemplo illustrentur, propositum sit introducere in æquationem differentialem $dz \pm dx = 0$ solutionem peculiarem $u - mx = 0$, designatis per u et x indeterminatis, per m verò datâ quantitate. Ad hunc scopum, multiplicetur proposita per $(u - mx)^n$, designato per n numero < 1. Prodit

$$(u - mx)^n \ dz \pm (u - mx)^n \ dx = 0 \ \ldots\ldots (3)$$

Sit u functio indeterminatarum x et z talis ut habeatur $\frac{du}{dz} dz = (u - mx)^n dz$ (4)

designato per $\frac{du}{dz} dz$ differentiali functionis u quoad solam z.

Integrando æquationem (4), reperitur

$$(u - mx)^{1-n} = (1-n)\ z + X\ (1-n), \ldots\ldots (5)$$

designatâ per X functione arbitrariâ indeterminatæ x, quæ compleat integrale functionis u. Differentiatâ æquatione (5) quoad tres simul indeterminatas, prodit

$$du - mdx = (u - mx)^n \ dz + (u - mx)^n \ d\ X \ \ldots\ldots \ (6)$$

Undè fit æquatio (3)

$$du - mdx + (d\ X \pm dx)\ (u - mx)^n = 0 \ \ldots\ldots (7)$$

Hanc æquationem ejusdem esse formæ ac æquationem generalem $d\mu + \mu^n \mathrm{Q}\ dx = 0$ manifestum est; ergo $u - mx = 0$ est solutio peculiaris.

29. Nihil fortè notatu dignius in solutionum peculiarium theoriâ quàm id quod, introductâ in æquationem differentialem propositam solutione peculiari, semper ex integrali ejusdem æquationis transformato eadem solutio peculiaris deduci possit. Sit $y = f\ (x, a)$ integrale æquationis $dy - pdx = 0$, designata per a constanti arbitrariâ. Si substituatur indeterminatæ y, ipsius valor per x et z expressus, prodibit integrale æquationis (2) § 28. quod resolutum quoad z dabit $z = \mathrm{F}\ (x, a)$. Res eodem rediret si in valore quantitatis z, id est, in integrali

æquationis (1) § 28, substituatur indeterminatæ y, ipsius valor $f(x, a)$. Ex æquatione $z = F(x, a)$ deduci poterunt solutiones peculiares quæ differentiali hujus æquationis competunt, variatione constantis arbitrariæ. Quo posito, demonstrari potest hâc methodo inventum iri, præter solutionem peculiarem $u = 0$, eas quæ æquationi $dy - pdx = 0$ competere potuerint. Reverà, differentiato valore indeterminatæ z quoad a, prodit, observando esse $y = f(x, a)$.

$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{dy} \quad \frac{df}{da}.$$

Atquoniam $\frac{dz}{dy} = u$, è theoriâ Lagrange ducitur $u \frac{df}{da} = 0$, æquatio cui satisfacit $u = 0$ solutio peculiaris introducta æquè ac $\frac{df}{da} = 0$. Si eliminetur a inter hanc et $z = F(x, a)$ seu $y = f(x, a)$, invenientur per z et x vel per x et y expressæ solutiones peculiares æquationis $dy - pdx = 0$, siquidem hujusmodi solutiones habeat.

Integrale æquationis $dz \pm dx = 0$ § 28, est $z = \pm (x - a)$. Effectâ in hâc æquatione eâdem indeterminatarum mutatione quæ in æquatione (3) § 28 facta fuit, prodit

$$u - mx = [\pm(1 - n)(x - a) + X(1 - n)]^{\frac{1}{1-n}}$$

Ex demonstratione præcedenti oportet ut sit $u - mx = 0$ solutio peculiaris hujus æquationis. Atquî hoc quidem invenitur si differentietur hoc integrale quoad a; nam tunc emergit

$$[\pm(1 - n)(x - a) + X(1 - n)]^{\frac{1}{1-n}} = 0$$

Seu, suppressâ quantitate $1 - n$

$$\pm (x - a) + X = 0,$$

æquatio quæ integrale nostrum reducit ad $u - mx = 0$. Ergo, etc.

DE SOLUTIONUM PECULIARIUM

SIGNIFICATIONE GEOMETRICA.

30. Referamus hic problema quod solvit Eulerus *Act. Acad. Berol. ann.* 1756 Multum inde lucis in sequentia emanabit. Quæritur curva talis ut demissarum è duobus punctis datis in ipsius tangentem quamcunque cathetorum productum sit constans. Designentur per p et q punctorum datorum abscissæ, eaque simplicitatis causa in axi abscissarum sita esse ponamus; porrò sit t subtangens pro puncto quolibet curvæ; erit $t-x$ pars axeos inter tangentem et originem sita : $t-x+p$, $t-x+q$ partes erunt ejusdem axeos inter tangentem et puncta data. Quibus positis, facilè invenitur similitudine trigonorum hinc tangenti, ordinata et axi abscissarum, indè axi abscissarum, cathetis et tangente formatorum,

$$\frac{(t-x+p)p}{\sqrt{(y^2+t^2)}} \qquad \frac{(t-x+q)y}{\sqrt{(y^2+t^2)}}$$

pro valoribus cathetorum. Observando nunc esse $t=\frac{ydx}{dy}$, cathetorum verò producto per K insignito, emerget pro æquatione problematis

$$(ydx-xdy+pdy)(ydx-xdy+ydy)-\mathrm{K}(dy^2+dx^2)=0.$$

Quæ æquatio difficilis integratu sub hâc formâ, facili, ut animadvertit Eulerus, si prævié differentietur, integrationi ansam præbet. Etenim tunc prodit, differentia dx pro constanti habita,

$$(ydx-xdy+qdy)(p-x)d^2y+(ydx-xdy+pdy)(q-x)d^2y-2\mathrm{K}dyd^2y=0,$$

quæ æquatio si per d^2y dividatur, fit

$$(ydx-xdy+qdy)(p-x)+(ydx-xdy+pdy)(q-x)-2\mathrm{K}dy=0,$$

nempè æquatio primi ordinis ut proposita. Indè sequitur si cum hâc combinetur, daturam esse, eliminatione differentiæ dy, æquationem finitam in x et y. Reverà, effectis omnibus reductionibus, invenitur

$$y^2+\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2}\left(x-\frac{p+q}{2}\right)^2=\mathrm{K},$$

æquatio ad ellipsin cujus quadratum è semi-axi majori est $K + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$, quadratum verò è semi-axi minori K. Erit egitur $\frac{p-q}{2}$ distantia centri ad focum. Porrò, quoniam $\frac{p+q}{2}$ est abscissa centri, puncta data sita sunt ad focos ellipseos.

Æquatio ad ellipsin quæ emersit è duabus æquationibus primi ordinis eliminatione differentiæ dy, nullam continet constantem arbitrariam. Habebit verò constantem arbitrariam æquatio a $d^2y = o$ deducta; nam indè fluit $\frac{dy}{dx} = a$, æquatio quæ cum propositâ combinatâ suppeditat

$$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = K(1 + a^2),$$

vel

$$y = ax - \left(\frac{p+q}{2}\right) a \pm \sqrt{\left[K(1 + a^2) + a^2 \left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right]}$$

æquatio ad duas rectas parallelas. Reverà liquet lineam rectam in positione idoneâ problemati quoque satisfacere. Eulerus hanc solutionis duplicitatem ut paradoxon calculi integralis consideravit. Ut paradoxon quoque consideravit quòd differentiatio locum integrationis obtinere posset. Sed ea omnia ex eo pendent quòd proposita pertineat ad classem æquationum quibus semper solutiones peculiares competunt.

31. Quod ut demonstremus, primùm probemus quod ante Lagrange latebat, nempè æquationem differentialem cui competit solutio peculiaris, differentiatam abire posse in duos factores quorum alter cum propositâ combinatus solutionem peculiarem præbet; alter verò, integrale. Reverà sit $V = o$ integrale æquationis differentialis primi ordinis $\frac{dV}{dx}\, dx + \frac{dV}{dy}\, dy = o$ (1), designatâ per a constanti arbitrariâ; ex hâc elicietur $a = \phi$, exprimente ϕ functionem quantitatum x, y, $\frac{dy}{dx}$. Quo valore constantis a in $V = o$ substituto, fit V functio quantitatum x, y, ϕ; æquatio verò differentialis propositæ sic mutatæ $V = o$ (3) fiet

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{dV}{d\phi}\,\frac{d\phi}{dx} = o.$$

At propter (1), delabitur ad

$\frac{dV}{dx}\,\frac{d\phi}{dx} = o$ (4) scilicet æquationem secundi ordinis.

Huic conditioni satisfit per $\frac{dV}{d\phi} = o$ æquè ac per $\frac{d\phi}{dx} = o$.

E $\frac{d\phi}{dx} = o$, deducitur $\phi = a$ (5), æquatio primi ordinis. Eliminato $\frac{dy}{dx}$ inter 3 et 5, seu quod eodem redit, eliminatâ functione ϕ, prodit integrale $V = o$. Cæterùm quùm $\phi = a$, erit quoque $\frac{dV}{d\phi} = \frac{dV}{da} = o$. Atqui § 13 hæc æquatio cum integrali combinata eliminando constantem a præbet solutionem peculiarem. Ergo $\frac{dV}{dp} = o$ combinata cum (3), eliminando $\frac{dy}{dx}$ seu ϕ, præbet etiam solutionem peculiarem; indè fluit differentiationem considerari posse ut medium exuendi æquationes differentiales solutionibus suis peculiaribus. Quamobrem nonnullæ æquationum classes faciliùs integrantur si primùm differentiatæ fuerint. At, auctore Poisson, methodus differentiationis liberando æquationem primi ordinis solutionibus peculiaribus eo incommodo premitur quòd ad æquationem secundi ordinis ducit. Ergo consultius est hujusmodi solutiones expellere, ut acutissimus geometra, merâ indeterminatarum mutatione.

32. Nunc via directa propositionem nostram demonstrare possumus nempè dari classem æquationum differentialium quæ semper solutiones peculiares admittant. Reverà sit $U = o$ integrale duas constantes a et b includens. Si a et b tanquàm arbitrariæ considerentur, $U = o$ erit integrale æquationis secundi ordinis

$$\frac{dp}{dx} + S = o \ldots\ldots (1),$$

ubi per p designatur $\frac{dy}{dx}$; per S verò functio quantitatum x, y et p. Quæ æquatio emergit ex eliminatione quantitatum a et b inter æquationes

$$U = o \ldots (2), \quad \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\,p = o \ldots (3), \quad \frac{d^2U}{dx^2} + 2\,\frac{d^2U}{dxdy}\,p + \frac{d^2U}{dy^2}\,p^2 + \frac{dU}{dx}\,\frac{dp}{dx} = o \ldots (4).$$

Si repræsentemus per ϕ et ψ valores constantium a et b ex æquationibus (2), (3) et (4) eliciti, ϕ et ψ erunt duæ functiones quantitatum x, y et p. Erunt quoque $\phi = a$, $\psi = b$ duo integralia primi ordinis æquationis (1). Illorum ergo differentialia cum hâc æquatione necessariò coïncident. Quæ autem differentialia erunt

$$\frac{d\phi}{dx} + \frac{d\phi}{dy}\,p + \frac{d\phi}{dp}\,\frac{dp}{dx} = o \ldots (5), \quad \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\,p + \frac{d\psi}{dp}\,\frac{dp}{dx} = o \ldots (6).$$

Indè emerget

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\frac{d\phi}{dx} + \frac{d\phi}{dy}\,p}{\frac{d\phi}{dp}} = -\frac{\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\,p}{\frac{d\psi}{dp}} = -\mathrm{S}.$$

Undè

$$\frac{d\phi}{dx} + \frac{d\phi}{dy}p = \frac{d\phi}{dp}\,\mathrm{S} \qquad \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\,p = \frac{d\psi}{dp}\,\mathrm{S}.$$

Ergo æquationes (5) et (6) evadent

$$\frac{d\phi}{dp}\left(\frac{dp}{dx} + \mathrm{S}\right) = 0 \ldots (7), \qquad \frac{d\psi}{dp}\left(\frac{dp}{dx} + \mathrm{S}\right) = 0 \ldots (8).$$

Quo posito, si æquatio differentialis primi ordinis formam habet

$$\Phi\,(a, b) = 0 \ldots (9),$$

ubi per Φ designatur functio quælibet; hæc æquatio, si differentietur, dat

$$\frac{d\Phi}{da}\;\frac{da}{dx} + \frac{d\Phi}{db}\;\frac{db}{dx} = 0,$$

ubi si substituantur quantitatibus $\frac{da}{dx}$. $\frac{db}{dx}$ ipsarum valores (7) et (8), prodit

$$\left[\frac{d\phi}{dp}\;\frac{d\Phi}{da} + \frac{d\psi}{dp}\;\frac{d\Phi}{da}\right] \times \left[\frac{dp}{dx} + \mathrm{S}\right] = 0,$$

æquatio quæ in duos abit factores, alterum primi ordinis ut proposita, alterum verò cui inest $\frac{dp}{dx}$, et a quo proindè deducitur æquatio differentialis secundi ordinis

$$\frac{dp}{dx} + \mathrm{S} = 0.$$

Undè concluditur, propter (7) et (8), $da = 0$, $db = 0$. Ergo functiones a et b erunt constantes. Porrò si tanquàm functiones arbitrariæ considerentur, erunt integralia primi ordinis propositæ

$$\phi = a \qquad \psi = b.$$

E quibus, eliminatâ quantitate p, emerget æquatio in x, y, a et b seu integrale propositæ (9) primi ordinis, quod, ut patet, idem erit ac æquatio $\mathrm{U} = 0$. Ne obliviscamur constantes a et b hujus æquationis satisfacere conditioni $\Phi\,(a, b) = 0$ quâ, ad unam constantem recidunt, nempè constantem arbitrariam integralis æquationis propositæ.

Aliundè factor primi ordinis præbet æquationem

$$\frac{d\phi}{dp} \quad \frac{d\Phi}{da} + \frac{d\psi}{dp} \quad \frac{d\Phi}{da} = 0 \dots (10),$$

in x, y et p, substitutis ϕ et ψ in locum quantitatum a et b. Ut vidimus § 31, si inter hanc æquationem et propositam eliminetur p, prodibit propositæ solutio peculiaris. Quo posito, designetur per $\Psi(x, y, p) = 0$, quod fit $\Phi(a, b) = 0$, quùm quantitatibus a et b substituuntur ipsarum valores in x, y et p, manifestum est prius membrum æquationis (10) evadere $\frac{d\Psi(x, y, p)}{dp}$; nam $\frac{d\phi}{dp}$, $\frac{d\psi}{dp}$ nihil sunt nisi coëfficientes differentiales functionum a et b quoad solam quantitatem p.

Indè concludere licet, ubi æquatio $\Psi(x, y, p) = 0$ induere potuerit formam $\Phi(a, b) = 0$, ipsius solutionem peculiarem emersuram esse ex eliminatione ipsius p inter eamdem æquationem et ejus differentiale quoad solum p; præterea solutionem peculiarem æquationi differentiali primi ordinis competere quotiescumque hæc formam præcedentem induere potest. Difficultas manet agnoscendi utrùm functiones datæ æquationem differentialem ingredientes ex eodem integrali ita pendeant ut repræsentare possint valores constantium ex integrali nec non ipsius æquationibus derivatis elicitos, an secùs. Lagrange cui totam hanc theoriam acceptam referimus difficultatem enodavit monstrando proprietatem hujusmodi functionum characteristicam in eo consistere quòd eàrum differentialia sese habent inter se rationibus expressis per functiones ejusdem ordinis ac functiones de quibus sermo est. Reverà, suprà vidimus functiones ϕ et ψ quibus repræsentantur valores constantium a et b ex æquatione $U = 0$, et ipsius derivatâ eliciti, habere differentialia quæ assumere possunt formam

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dp}\left(\frac{dp}{dx} + S\right) \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dp}\left(\frac{dp}{dx} + S\right)$$

Undè

$$\frac{d\phi}{dx} : \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\phi}{dp} : \frac{d\psi}{dp};$$

Ergo, etc. His quoque patet hujusmodi functiones tales esse ut rationes ipsarum differentialium totorum eædem sint ac rationes differentialium quoad solum p.

33. Nunc patebit ea quæ Eulerus ut paradoxa consideravit, ex eo pendere quòd æquatio problematis ejusdem sit formæ atque illæ quæ § 32 consideratæ fuerunt.

Reverà, ponatur æquatio ad duas rectas parallelas sub formâ generali $y = ax + b$. Quâ ex æquatione et ipsius differentiali $\frac{dy}{dx} = a$ si eliciantur constantes a et b, habetur $a = \frac{dy}{dx}$, $b = y - \frac{xdy}{dx}$. Conditiones autem problematis suppeditant æquationem

$$(b + ap)(b + aq) = K(1 + a^2).$$

Quæ, substitutis valoribus præcedentibus quantitatum a et b, convertitur in æquationem differentialem problematis. Hic quoque comprobari potest character a Lagrange indicatus. Habetur enim $\phi = p$ et $\psi = y - px$. Undè $\frac{d\phi}{dx} : \frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{x}$. Cæterùm $\frac{d\phi}{dp} = 1$ $\frac{d\psi}{dp} = -x$. Undè $\frac{d\phi}{dp} : \frac{d\psi}{dp} = -\frac{1}{x}$. Ergo, etc.

31. Per considerationem quam Leibnitzius primus adhibuit ad solvenda problemata quædam solutionibus peculiaribus complicata directò ad æquationem ellipseos pervenire possumus ad quam analysis nonnisi per ambages ducit. Etenim sit $y = ax + b$ æquatio lineæ rectæ enunciatâ proprietate gaudentis. Eadem æquatio repræsentabit tangentem ad punctum quodlibet hujus rectæ. Prætereà sint p et q abscissæ datorum punctorum in axi abscissarum. Erunt catheti è datis punctis in rectam ductæ.

$$-\frac{ap + b}{\sqrt{1 + a^2}} \qquad -\frac{aq + b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Porrò, substitutâ ipsi b quantitate $y - ax$, prodit ex problemate

$$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = K(1 + a^2). \quad (1)$$

æquatio quam obtinuit pro integrali Eulerus. Indè factâ differentiatione quoad a emergit

$$-y(2x - p + q) + 2a(x^2 - (p + q)x + pq) = 2aK$$

Undè

$$a = \frac{y[2x - (p + q)]}{2[x^2 - (p + q)x + pq - K]},$$

qui valor si in (1) substituatur emerget evidenter æquatio curvæ quæ oritur ex intersectione continuâ linearum æquatione (1) repræsentatarum variante continuo a. Quæ curva erit problematis quùm scilicet ejusmodi erit ut tangens ad quod-

libet ipsius punctorum proprietate enunciatâ gavisura sit. Atqui substituto valore quantitatis a, prodit

$$\left[\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 + K\right]y^2 = -K\left[x^2-(p+q)x+pq-K\right],$$

seu additâ et ablatâ in posteriori membro quantitate $-K\left(\frac{p-q}{2}\right)^2$,

$$\left[\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 + K\right]y^2 = -K\left(x-\frac{p+q}{2}\right)^2 + K\left[K+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right]$$

æquatio ad ellipsin jam reperta.

35. In præcedenti exemplo solutio peculiaris æquatio est curvæ quæ oritur ex intersectione continuâ omnium curvarum per integrale repræsentatarum, varianti continuò arbitrariâ a. Quod quidem semper obtinere demonstrari potest. Etenim intersectio continua seriei curvarum infinitè parùm a se invicem diversarum nihil est nisi curva quæ omnes istas curvas amplecteretur seu tangeret ac idcircò in quolibet punctorum suorum tangentem sibi et alicui curvarum earumdem communem haberet. Quo posito, sit $V=0$ æquatio generalis seriei curvarum de quibus sermo est, designatâ per V functione quantitatum x, y et a, a parameter est in unâquâque curvarum constans ab unâ verò ad alteram varia. Curva quæ ex earum intersectione continuò oritur quùm punctum habeat cum unâquâque commune, easdem necessariò habet ordinatas x et y, eamdemque inter coordinatas æquationem, eâ tamen cum restrictione ut parameter a constans in unâquâque curvarum variet in curvâ contactûs. Porrò positio tangentis eadem esse debet in curvâ ubi a est constans atque in eâ ubi variat; seu, quod eodem redit, utriusque curvæ æquatio eumdem valorem pro $\frac{dy}{dx}$ suppeditare debet. Quod quidem obtinebit si differentiale functionis V quoad a evanescat; nam manifestum est tunc duas æquationes

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{dV}{da}\,\frac{da}{dx} = 0,$$

eumdem pro $\frac{dy}{dx}$ suppeditaturas esse valorem, quùm posterior ad priorem recidat propter $\frac{dV}{da}=0$.

36. Demonstratum est æquationem differentialem primi ordinis solutione suâ peculiari liberari posse, si quidem talem admittat, et contrà in datam æquationem differentialem solutionem peculiarem quamlibet introduci posse. Porrò vidimus solutionem peculiarem licet arbitrio sumptam eo vinculo cum integrali connecti ut ab hoc per variationem constantis arbitrariæ posset elici. Quæ quidem nunc difficilia intellectu videri possunt, si integrale et solutio peculiaris geometricè considerentur. Sed, ut annotavit Poisson, si efficiatur in integrali indeterminatarum mutatio quædam quæ non sit mera coordinatarum mutatio et deinceps novæ indeterminatæ pro coordinatis sumantur, emerget nova series curvarum et nova proindè curva contactûs. (*Vid. Poisson, Jour. polyt.*, XIII *cahier.*)

37. Hancce dissertationem nostram terminabimus consideratione solutionum peculiarium in Dynamice. Geometræ eò jam pervenerunt ut æquationibus differentialibus exprimatur motus systematis punctorum nexu quocumque inter se ligatorum, et viribus quibuscumque obedientium. Quùm ejusmodi æquationes admittere queant solutiones peculiares, patet, tali casu, discernendum esse utrâ æquationum solutione peculiaris an integrale motus circumstantias exprimat. Annotavit eatenus Poisson, in his problematibus, interdùm nonnisi solutiones peculiares, interdùm nonnisi integralia adhibenda esse : porrò nonnullos dari casus ubi motus systematis repræsentari debeat nunc per integralia, nunc per solutiones peculiares. Hìc exemplum afferre sufficiet primi casûs quippè qui duos alios includit. Determinare motum rectilineum corporis impulsi vi retardatrice variabili et radici quadratæ è celeritate mobilis proportionalis. Erit æquatio motûs, designatis per t tempore, per v celeritate et per a quantitate constanti

$$\frac{dv}{dt} = -a\sqrt{v}.$$

Huic æquationi competit solutio peculiaris $v = 0$ et integrale $v = \left(c - \frac{at}{2}\right)^2$, ubi c constans est arbitraria. Si ponatur $\sqrt{b}$ celeritas mobilis initio temporis, fiet integrale

$$v = \left(\sqrt{b} - \frac{at}{2}\right)^2.$$

Patet ubi celeritas initialis erit $= 0$ solutionem peculiarem, non verò integrale fore æquationem motûs. Erit integrale æquatio motûs quamdiù erit $\sqrt{b} > \frac{at}{2}$. Solutio peculiaris denuò fit æquatio motûs simul ac est $\sqrt{b} = \frac{at}{2}$, id est, ubi tempus fit $\frac{2\sqrt{b}}{a}$.

TANTUM.

Præstantissimo auctori hoc eruditionis mathematicæ specimen congratulabundus, impressionem approbat.

CAROLUS HAUFF,

h. t. Decanus.

THESES.

I.

Perperàm Condillac animi facultates a sentiendi capacitate repetit.

II.

Omnes nostri systematis planetæ ad eamdem a sole distantiam absque celeritate initiali positi eodem ad solem motu feruntur.

III.

In calculis observationum hypsometricarum ope barometri factarum gravitatis variatio citra errorem sensibilem negligi potest.

IV.

Theoria fractionum continuarum in libris vulgaribus hodiè quoque non ita exculta deprehenditur uti argumenti gravitas ac dignitas exigunt.

V.

Geometrarum demonstrationes indirectæ evidentiâ et vi convincendi directis neutiquàm cedunt.

VI.

Trigonometria nobis offert exemplum disciplinæ omnibus numeris absolutæ.

VII.

Causa generalis roris matutini et vespertini ventorumque comitantium ex actione solis in aërem atmosphæricum optimè erui potest.

VIII.

Gaz acidum carbonicum a plantis haustum, ab iis ita disjungitur ut illius basis in ipsam transeat plantæ compositionem ; oxygenium autem, accedente luminis actione, in atmosphæram iterùm emittatur.

IX.

Vires plantarum generatìm sequuntur conformationem ipsarum exteriorem.

X.

« Ordines naturales plantarum valent de naturâ plantarum, artificiales in diagnosi plantarum ». (*Linn. gen. plant. in præf.*)

XI.

« Methodus naturalis primus et ultimus finis Botanices est et erit ». (*Linn. Phil. Bot.*)

XII.

In classificatione plantarum, characteres a proportione partium magis valere quàm a numero petitos, plantarum morphonomia demonstrat.

DISSERTATIO INAUGURALIS PHYSICA,

DE

COMBUSTIONE,

QUAM

EX RECTORIS MAGNIFICI I. DENZINGER,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE,

PRÆVIO FACULTATIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORIS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS AC PRIVILEGIIS,

IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

RITÈ AC LEGITIMÈ CONSEQUENDIS,

PUBLICO EXAMINI SUBMITTIT,

Die 23 Januarii 1821, horâ, 3

AUCTOR

MARTINUS MARTENS, MOSÆ TRAJECTINUS.

LEODII, TYPIS P.-J. COLLARDIN, TYPOGRAPHI ACADEMICI.
MDCCCXX.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opinions, sans que, pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

Art. 56 du Règlement.

A MON PÈRE.

A MONSIEUR

J. P. MINCKELERS,

Ci-devant professeur de physique et de chimie à l'ancienne Université de Louvain, et en dernier lieu au Collége de Maëstricht, membre de la première classe de l'Institut royal des Pays-Bas, de l'Académie des sciences et belles-lettres de Bruxelles, etc. etc.,

Comme à celui qui a dirigé mes premiers pas dans les sciences physiques.

M. Martens.

Ignis ubique latet, naturam amplectitur omnem,
Cuncta parit, renovat, dividit, unit, alit.

DISSERTATIO PHYSICA INAUGURALIS

DE COMBUSTIONE.

COMBUSTIONIS HISTORIA.

1. QUANQUAM combustionis phœnomenon jam inde ab antiquissimis temporibus notum fuerit, causa tamen legesque quibus regitur, nostrâ tantum ætate, a chemicis detectæ sunt. Antiqui physici, qui omnia phœnomena causis mechanicis explicare studebant, ignem in corporibus diffusum ac incarceratum credebant, combustioque illis medium rumpendi ignis vincula videbatur, et terminata erat quum omnis ignis effluxisset. Anno 1665 Hooke theoriam combustionis edidit illi quam, nostris temporibus, Cl. Lavoisier stabilivit maxime affinem. Substantiam similem illi quæ in nitro fixa reperitur in aëre contineri credidit, et illius ex sententiâ nihil aliud fuit combustio quam corporis combustibilis in hâc substantiâ dissolutio. Aliquo post tempore Cl. Sthalius, qui primus chemica phœnomena in corpus doctrinæ conjungere studuit, inflammabile quoddam principium, cui *phlogistici* nomen indidit, veterum igni substituit, combustionemque ad effluvium hujus principii actione caloris productum reduxit. Medio fere sæculo decimo octavo, Macquer, phœnomenis rite perpensis, theoriam Sthalii modificandam aërisque actionem in combustione admittendam statuit. Putavit igitur phlogisticum, quod lumen esse corporibus infixum dixit, hisce tam firmiter adhærere ut ab iis separari non posset nisi aëris et caloris unitâ actione, aëremque in locum ignis quem conjunctionis vinculo expediebat succedere. Priestley, Crawford et Kirwan, Sthalii

theoriam adhuc perfectiorem reddere tentarunt. Primus asseruit phlogisticum, vigente combustione, evolutum cum aëre combinari, huncque ita combustioni sustinendæ imparem evadere : secundus eâdem combinatione effluvium caloris et lucis, quod durante combustione observatur, explicavit : tertius phlogisticum nihil aliud esse quam hydrogenium contendit. Omnes hasce theorias non longe abhinc evertit celeberrimus Lavoisier. Hic multis experimentis probavit in omni combustione, libero in aëre peractâ, unam aëris partem, *oxigenium* nempe, absorberi, combustionemque nonnisi hoc fluido sustentari : corpora conflagrantia absorptione oxigenii quoad qualitates mutari pondereque aëris absorpti augeri reperiit, nequaquam vero consumi, nec quoad naturam intimam immutari, cum, ablato quod absorpserant oxigenio, in pristinum statum restituantur. Corpora exinde, prout cum oxigenio vel combinari vel non combinari poterant, in *combustibilia* et *non-combustibilia* divisa fuere; et combustio deinceps a plerisque chemicis ut mera oxidatio habita fuit, nullo ad caloricum et lumen, eâ vigente, evoluta respectu habito. *Chlorum* autem combustioni non inservire nisi propter oxigenium ipsi insitum crediderunt. Postquam vero clarissimi Davy, Gay-Lussac et Thenard probarunt chlorum in omnibus phœnomenis uti corpus simplex sese habere, concludere necesse erat oxigenium non unice, ut antea creditum, combustionis alendæ proprietate gaudere, sive, ut accuratius loquar, caloricum et lumen dum sese cum corporibus combinat evolvere; et proinde combustionem in oxigenatione consistere amplius dici nequit. Tandem Davy constitutionem flammæ descripsit, ejus phœnomena investigavit, eaque in artium humanique generis utilitatem convertit.

COMBUSTIONIS DEFINITIO.

2. Per combustionem eum actum intelligo in quo corpus cum

alio corpore sese combinans calorem una et lucem producit. A definitione quam multi chemici de combustione præbent non absque ratione discedo. Hi combustionem dicunt esse phœnomenon in quo oxigenium cum corpore quodam sese combinat (*). Ast hujus definitionis si originem repetas, vitium illius facile agnosces. Cum enim conspicerent corpora nonnisi suâ cum oxigenio combinatione plerumque comburi, hâc in combinatione combustionem consistere prædicabant, ita ut quod pro causâ combustionis immediatâ haberi debuisset, pro ipsâ combustione habitum sit. Combustionem vero ab oxigenatione distinguendam esse animadvertit Lavoisier cum dicit : « L'oxigénation n'entraîne pas essentiellement l'idée de « combustion, puisque la combustion proprement dite ne peut « avoir lieu sans un dégagement de lumière et de calorique. » (**) Quin etiam nulla exstat ratio cur soli oxidationi combustionis nomen imponamus : nam licet combustionis phœnomenon quam plurimum ab oxidatione dependeat, non semper tamen ab ipsâ profluit, cum multæ substantiæ in chloro æque ac in oxigenio conflagrent.

Combustionis phœnomena.

3. Cum ea sit menti humanæ veritatem inquirenti via ut ab effectibus ad causas ascendat, primo examinanda erunt phœnomena quæ combustio exhibet, dein eorum causæ indagandæ. Differunt autem plura combustionis phœnomena prout corpora conflagrantia vel solida sunt, vel liquida, vel aëriformia. Solida enim et liquida, oxigenio haud permeabilia, in superficie tantum conflagrant : quæ vero aëriformi statu gaudent corpora, combustionem in totâ fere massâ plerumque exhibent, quia oxigenium totam massam potest

(*) Thenard. Traité de chimie, tom. 1.

(**) Lavoisier. Traité de chimie, 3e. édition, t. 2, pag. 92.

permeare : hoc in statu corpora flagrantia flammam constituunt quæ diversa phœnomena notatu digna studio nostro præbebit.

De flammâ.

4. Consistit flamma in fluido aëriformi quod suâ cum oxigenio vel alio gazo combinatione ita calefactum est ut caloricum una et lumen emittat. Hujus propositionis veritatem minime in dubium vocabit qui nullam unquam flammam absque fluido aëriformi in eâ conflagrante existere, omneque fluidum aëriforme conflagrans flammam producere consideraverit. Sic carbo candens tamdiu solummodo flammam fundit quamdiu volatilia ejus principia, hydrogenium nempe et oleum, nondum combusta sunt. Celeberrimus Newtonus in mirandis sub finem de opticâ libri sibi propositis quæstionibus constitutionem flammæ rite exposuit. » An non flamma, « ait, vapor est, fumus sive exhalatio candefacta; hoc est calefacta « usque eo ut lumen emittat? Corpora enim flammam non conci- « piunt, nisi si emittant fumum copiosum, qui porro fumus ardet « in flammâ...... Aliqua corpora motu vel fermentatione calefacta, « si utique calor iste sit magnus, fumum emittunt copiosum; sique « corpora ea satis admodum incalescunt, fumi isti lucebunt et « sese in flammam convertent. Metalla liquefacta flammam non « concipiunt, inopiâ fumi copiosi, zincum si excipias, quod et « fumum emittit copiosum eoque et flammas fundit...... Utique « fumus inter transeundum per flammam, fieri non potest quin « candescat, et fumus candefactus non potest non habere speciem « flammæ «. Dolendum sane tales ideas a Newtoni successoribus non sat perpensas fuisse : fortassis enim tum ad *lampadem*, sic dictam, *securitatis* detegendam, tum ad ejus effectus explicandos conduxissent.

5. Flamma in universum conica est, ejusque basis spectat corpus quo alimentum trahit. Pro variâ autem hujusce corporis naturâ

varios exhibet colores, ut flamma sulphuris, cæruleum, sebi flavum et camphoræ album. Ratio tum ejus levitatis, tum facilitatis quâcum levissimo flatu agitatur ab aëriformi ejus compositione repetenda est. Flamma pelluciditate quoque gaudet : per longum tamen tempus opaca habita est, quia objecta lumine debiliori fulgentia trans eam non conspiciuntur. Ast Cl. Rumfort demonstravit (*) opacitatem flammæ hoc in casu nonnisi apparentem esse, cum corpora quæ fortiori lumine lucent facile trans flammam cerni, lumenque aliorum corporum libere etiam per ipsam transmitti expertus sit : hæc vero trans illam ideo non conspiciuntur quod eorum lumen cum flammæ luce multo fortiori ad oculos perveniat.

6. Flamma calorem multo intensiorem exhibet quam solida corpora conflagrantia. Memorandum hujusce rei exemplum habetur in flammâ quam hydrogenii cum oxigenio mixtura Newmanni calamo expressa efformat : hæc enim flamma quamvis per diem vix conspiciatur, refractaria tamen corpora promptissime liquefacit, lumenque a solidis substantiis in ipsâ flagrantibus emissum tam vivum est ut ægre ab oculo feratur. Hinc intelligitur cur gaza eodem caloris gradu, quam corpora solida, luminosa non fiant, ut Wedgwood expertus est. Eo major esse videtur flammæ cujusvis temperatura quo major in fluidis ipsam formantibus hydrogenii copia continetur, idque gazum majorem quam cætera corpora calorem combustione suâ producit. (**)

7. Flammæ longitudo tum a quantitate fluidorum combustibilium quæ statuto tempore in illam affluunt, tum a minori, quâ eorum combustio peragitur, celeritate dependet. Sic, si flammam olei iis quas edit alcohol tali modo circumdamus ut minimum tantum inter ipsas intervallum intercedat, omnes, sed media præsertim, multo

(*) Transactions philosophiques, an 1794.

(**) Annales de chimie et de physique, t. 4, p. 269.

longiores evadunt (*) : quod eo explicari posse mihi videtur quia aëre frigido non ubique circumdatæ, ut cum segregatæ sunt, mutuoque contactu a causis frigoris protectæ, altiori temperaturâ debent gaudere; unde copiosior liquidorum illas efformantium volatilisatio: in mediâ vero flammâ, cujus temperatura intensior, volatilisatio fortior esse debet; quam ob rem flamma hæc cæteris longior. Ex dictis facile eruitur ratio cùr flamma in universum apice acuto terminetur; nam major vaporis copia in ejus centrum affluit ut ex spatii obscuri formâ liquet; ideoque prope axim flamma longior esse debet. Non intellectu difficile est flammam quoque longiorem reddi posse combustione ejus retardatâ: sic si in superiorem flammæ candelæ partem corpus frigidum haud spissum, uti virgam ferream, horizontaliter immittimus, observamus : 1°. fluida flammæ combustibilia corpori frigido contigua rubro orbari calore, ita ut spatium obscurum circa illud in flammâ cernatur : 2°. fluida quæ corpus frigidum non tangunt, sed ad latera flammæ ascendunt minori cum intensitate conflagrare, copiosum fundere fumum, et altius ardentia efferri. Cur autem hoc in casu flamma longior fiat, facile intelligit qui considerat fluida combustibilia, in superiori flammæ parte refrigerata, lentius comburi debere, ideoque majorem attingere altitudinem antequam conflagrare desinant. (**)

8. Lumen flammæ omnem suam intensitatem a particulis solidis in ipsâ suspensis trahit. Cui enim flammæ harum particularum major copia, etiam luminis intensitas maxima est. Exemplo sit flamma camphoræ, quæ lumen vividissimum emittit, simulque tot particulas carbonarias continet, ut liquet ex denso harum particularum flumine quod in partem superiorem flammæ telâ metallicâ sectæ succedit. Augetur quoque mirum in modum lumen flammarum sulphuris, hydroge-

(*) Musschenbroek, Cours de physique expér. et math., §. 1653.

(**) In inferiorem flammæ partem si immitteretur corpus frigidum, imminutâ sevi volatilisatione, haud longior evaderet flamma.

nii, etc. injecto in ipsas subtilissimo oxidi zinci vel amianti pulvere. Hujus autem phœnomeni ratio in eo posita est quod solida multo plus luminis quam aëriformia corpora in combustione emittant. Unde intelligitur intensitatem flammæ adaugeri cum particulæ solidæ copiosius in ipsâ præcipitantur. Sic in flammâ hydrogenii carburati, cum quantitas aëris sufficiens ad ejus interiora pervenire impeditur, hydrogenium solum comburetur, carbonisque particulæ præcipitatæ in flammâ ardentes ejus intensionem augebunt. Hinc patet cur hydrogenium carburatum aëri communi mixtum, quale v. g. in fodinis carbonum occurrit, pallidiori cum lumine conflagret quam quod purum in atmosphærâ comburitur : calor vero in priori casu copiosius evolvitur, quod ex perfectiori combustione repetendum est. Phœnomena ista simplici experientiâ perspicua reddidit Cl. Davy. « J'ai tenu, dit-il, une toile métallique d'environ 900 ouvertures « au pouce carré sur un courant de gaz hydrogène carboné qui « sortait d'un petit tube, et j'ai allumé le gaz au-dessus de la « toile métallique qui étoit presqu'en contact avec l'orifice du tube : « le gaz brûla avec une vive lumière comme à l'ordinaire. La toile « métallique ayant été éloignée pour que le gaz pût se mêler avec « une plus grande quantité d'air avant d'être enflammé, la lumière « devint plus faible, et à une certaine distance, la flamme parut « précisément la même que celle d'un mélange explosif qui brûle « dans la lampe. Cependant quoique la lumière fût si faible dans « ce dernier cas, la chaleur était encore plus grande que lorsque « la lumière était plus vive, et un bout de fil de platine tenu au « milieu de cette faible flamme bleue fut à l'instant chauffé jusqu'au « blanc. » (*)

Ex dictis hisce intellectu facile est sidera cadentia aliaque meteora ignea non posse inflammatione fluidorum aëriformium produci, ut

(*) Annales de chim. et de phys., t. 3, pag. 130.

multi crediderunt, cum fluida hæc nonnisi debilissimum lumen in combustione suâ emittant.

9. Neminem latet, flammam sub recipiente in quo aër non renovatur collocatam magis magisque intensitatem amittere, et demum extingui priusquam oxigenium omne in recipiente evanuerit. Multi præmaturam hanc flammæ extinctionem fluidis elasticis combustione procreatis, quæ oxigenii, ut putant, actionem reprimunt, adscripsêre. Ast tum omnes flammæ fluidum elasticum non producunt, tum etiam novissime Cl. Davy probavit citiorem, tardioremve flammæ extinctionem ab insufficienti quantitate oxigenii immediate non dependere, sed a gradu temperaturæ quo substantiæ flammam constituentes combustionem concipiunt; ita ut fluida elastica quæ minori caloris copiâ ad conflagrandum indigent, minus quoque oxigenii ad combustionem requirunt : quod sequenti experimento apprime monstravit. « Introduisez, dit-il, une bougie allumée dans une longue « bouteille à col étroit, laissez-la brûler jusqu'à ce qu'elle s'éteigne; « bouchez la bouteille avec soin et introduisez ensuite une autre « bougie allumée; elle s'éteindra avant d'être au fond du col. A « présent, portez-y un petit tube contenant du zinc et de l'acide « sulfurique affaibli, après avoir allumé l'hydrogène qui se dégage « à son ouverture; ce gaz brûlera en quelqu'endroit qu'on place « le tube dans la bouteille. Après l'extinction de l'hydrogène, intro- « duisez du soufre allumé, il brûlera pendant quelques momens; et « quand il aura cessé de le faire, le phosphore sera aussi lumineux « dans la bouteille que dans l'air; si on l'y échauffe, il donnera « une flamme d'un jaune pâle et d'une intensité considérable. » (*)

Ex his eruitur ratio extinctionis flammæ in athmosphæris vitiatis vel in vacuo pneumatico. Cum corpus in aëre parvam oxigenii copiam continente conflagrat, parum tantum calorici evolvitur,

(*) Annal. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 281.

idque in ratione directâ est cum quantitate oxigenii in aëre qui combustioni inservit contentâ; ita ut, si proportio oxigenii magis magisque minuatur, sicut fit in recipiente pneumatico quo aër educitur, minor etiam evadat calorici emissi quantitas : temperatura igitur corporis conflagrantis sensim imminuetur; tandemque, si de flammâ agitur, (*) insufficiens erit ut gazum frigidum, quod continuo in flammam, quam alat, ascendit, in combustionem rapiat. Sequitur inde, gaza, quæ ad conflagrandum minorem calorem postulant, quæque intensiorem combustione producunt, diutius in vacuo pneumatico vel in athmosphæris vitiatis conflagrare, quod et experientia comprobat. Non desunt quoque experimenta quæ demonstrant frigus causam revera esse proximam extinctionis flammæ in vacuo pneumatico; hæc enim, servatâ temperaturâ, diutius in vacuo isto perdurat : sic cel. Davy expertus est flammam naphtæ, quæ sub recipiente pneumatico, aëre sexcies rarefacto, extinguitur, adhuc conspicuam esse sub gradu rarefactionis quintuplo altiori, cum naphta ferro ardenti imposita est : item flamma hydrogenii, quæ evanescit in aëre cujus densitas octuplo minor est facta, adhuc in aëre sedecuplo rariori conflagrat, si filum tenue platini spiraliter contortum in ipsâ suspenditur. Hoc in casu filum combustione hydrogenii ardens factum, cum calorem receptum lente amittat, combustionem gazi sustentabit donec ardere desierit. Davy novissime hanc proprietatem utiliter adhibuit ut flammam lampadis securitatis in athmosphæris vitiatis diutius conservet.

10. Si telam metallicam mediâ in flammâ horizontaliter tenemus,

---

(*) Dico *si de flammâ agitur*; nam cum corpora solida majori, cæteris paribus, massâ quàm fluida aëriformia gaudeant; multo diutius calorem servabunt, ita ut si massa ipsis sat magna sit, nec corporibus frigidis caloricum bene ducentibus applicentur, conflagrabunt sub recipiente pneumatico, usque dum tota oxigenii quantitas consumpta sit.

non potest hæc ad solitam altitudinem assurgere, quin fluida elastica ipsam componentia telæ interstitia permëent; sed cum inter transeundum per telam corpus frigidum calorem optime ducens tangant, necesse est ut majorem caloris sui partem illi cedant, et proinde temperaturæ gradum ipsis ad conflagrandum necessarium amittant; flamma igitur, dum transit per telam, extinguetur, ejusque in locum supra hanc succedet conus fluidorum combustibilium qui a parte flammæ infra telam positâ eo tantum differt, quòd minori temperaturâ gaudens nec luminosa sit nec conflagret; conus iste obscurus, admoto igne, incendi potest; et conflagrare perget, si ejus combustione calor sufficiens evolvitur, quo adversus causas refrigerantes defendatur : non autem ea, quam formabit, flamma, illi quæ infra telam posita est, contigua erit, nec cum ipsâ flammam unicam, ei quam, telâ detractâ, habebis plane similem, constituet; sed intervallo obscuro telâ occupato ab invicem distabunt : intervallum istud, frigore quo tela metallica fluida combustibilia ipsi proxima afficit procreatum, telâ incalescente, imminuitur, tandemque evanescit, si augeatur hujus temperatura eo usque ut fluida elastica ipsam permeantia infra caloris gradum eorum combustioni necessarium refrigerari non possint; hoc enim in casu flammam intercipere tela nequit.

11. Cum telæ metallicæ in flammam effectus ab ipsius refrigerandi vi solum dependeat, patet ejus actionem eo efficaciorem esse quo minora illius interstitia et quo major illius massa sit; tunc enim flamma, dum telam transit, majori cum materiæ quantitate in contactum venit; hinc fit ut tubus metallicus angustus multo melius quam exiguum foramen in tenui laminâ pertusum flammam intercipiat; sequitur etiam exinde, gazorum flammas, quæ minorem ad conflagrandum calorem postulant, difficilius telis metallicis intercipi, ideoque strictiores telas ab illis exigi; ista enim fluida majorem calorem amittant necesse est, ut temperatura eorum gradu caloris

combustioni necessario minor evadat; item flamma quæ plus calorici emittit, celerius telam metallicam transmeabit; non solum enim plus calorici amittere potest, priusquam extinguatur; sed et etiam, cum telam magis calefaciat, citius eam sibi intercipiendæ imparem reddet. Omnia hæc non solum theoriæ, sed et experientiæ conformia existunt sicut Davy probavit. (*)

12. Proprietati telarum metallicarum transitum flammæ impediendi superstructa est lampadum securitatis constructio. Notum jam fuit, ante earum inventionem, explosiones gazi inflammabilis non propagari trans tubos arctos nec trans exiguum in metallicâ laminâ pertusum foramen, uti quotidie videre licuit tum in novo gazi ope illuminandi modo, tum in calami Newmannii effectibus. Quibus sedulo perpensis, Davy lampadem excogitavit telâ circumdatam metallicâ filo tenui ferreo extructâ cujus pollex quadratus 748 foramina continet; initio autem imperfecta erat ex eo quòd non sat provisum esset effectibus caloris rubri quem tela in superiori parte, lampadis combustione, acquirere potest; inde explosiones in fodinis quandoque non impediit : cognito autem vitio, altera tela superiori lampadis parti adjecta fuit. Multa adhuc in ipsâ novissime perfecit Chevremont (**), ita ut credere liceat lampadem in posterum successu nunquam carere.

13. Flamma tum sevi, tum alcoholis aliarumve substantiarum spatium obscurum, in quo extremitas ellychnii demergitur, in centro exhibet; spatium hoc, flammæ formam referens, ad altitudinem pro ejus naturâ variabilem, sed nunquam usque ad illius verticem extenditur; hujus autem spatii ut constitutio mihi innotescat, flammam candelæ diversis ab extremitate ellychnii distantiis laminâ metallicâ horizontaliter secui, eâque paucis post minutis secundis

---

(*) Annal. de chim. et de phys. t. 4.

(**) Annal. général. des sc. phys. t. 1. Bruxelles.

extractâ, in superficie inferiori macula carbonaria circularis e particulis carbonis in flammâ suspensis sine dubio proveniens, cum supra conum obscurum flamma secta fuit, observabatur : cum vero infra apicem coni obscuri laminam in flammâ detinui, macula circularis ex adiposâ materie formata annuloque substantiæ carbonariæ circumdata in ipsâ conspiciebatur; macula ista partem laminæ, quæ spatio obscuro immissa fuerat, totam obtegebat, quo fit ut eò major sit, quò propius ad extremitatem ellychnii lamina teneatur; contrarium obtinet in annulo carbonario; hic enim eò largior fit quò lamina magis ab extremâ ellychnii parte recedit, cumque in parte flammæ prorsus lucidâ supra spatium obscurum lamina tenetur, evanescente sevi maculâ, abit annulus in maculam circularem nigram, quæ eò angustior evadit, quò flammæ apici lamina propior consistit : hæcce sæpius a me observata phœnomena diversarum flammæ candelæ partium constitutionem optime nobis ostendunt; ex illis enim perspicimus vapores sevi, non statim cum ex ellychnio erumpunt, conflagrare, ideoque spatium obscurum circumcirca relinquere, certâ vero distantiâ ab illo remotos flagrare, carbonis moleculas deponere, tuncque partem flammæ lucidam efformare; ista quoque conspicua fiunt, si tela metallica horizontali situ in flammam paulatim demittatur : tunc oculo supra telam posito, primum discus luminosus infra illam conspicitur, qui, telâ amplius demissâ, mox obscurus in centro evadit; ita ut flamma telâ inferior conum truncatum luminis intus obscurum referat; eo autem minùs spissum cernitur spatii obscuri luminosum involucrum, quo propius extremitati ellychnii tela tenetur. Multi, facto hoc experimento, flammam intus omnino obscuram se vidisse narrant, ideoque combustionem nonnisi in illius superficie fieri prædicant; idque plures impossibilitati aëris in interiorem flammam penetrandi adscribunt; ast non solum ista impossibilitas, ut postea videbimus, admitti nequit; sed et ego semper vidi, cum telam metallicam sensim sensimque de-

misi, primam flammæ sectionem penitus luminosam esse; quod et rationi et cæteris phœnomenis conforme est; notandum vero conum obscurum infra telam conspici priusquam hæc demissa ad locum pervenerit, in quo conus, trans flammam conspectus, desinere videtur. Hoc autem inde provenit quod conus obscurus, apicem versus, trans flammam conspici nequeat ob intensitatem luminosi involucri quo circumdatur; cum igitur spatium obscurum a vaporibus sevi non conflagrantibus occupatum in flammâ adesse nobis compertum sit, facile intelligemus fieri posse ut in flammam corpora maxime combustibilia immittantur quin ullo modo ignem concipiant, dummodo in obscurum conum detineantur; et reipsa cl. Murray in *philosophical magazine* narrat se spatulâ eburneâ in flammam candelæ pulverem tormentarium introduxisse, eumque extractum humidum fuisse : imo affirmat se per plura minuta secunda argentum fulminans in obscuro flammæ cono conservasse, quin detonaverit; ego, aliis corporibus combustibilibus adhibitis, eadem phœnomena observavi. Intelligi nunc potest, cur in candelâ ellychnium non omnino igne consumatur, licet valde combustibile sit et a flammâ circumdetur : occupat enim spatium in quo nulla occurrit combustio; inde etiam cùm longitudine multum accreverit, adeo ut lucidam flammæ partem tangat, brevi ad extremitatem consumitur. Sed causa defectûs combustionis circa ellychnium unde repetenda? An ideo quod oxigenium athmosphæricum huc penetrare nequit, sicut videtur pluribus physicis? An ex eo quod sevum magnam calorici quantitatem, dum vaporisatur, latentem reddens vapores circa ellychnium existentes infra temperaturam eorum combustioni necessariam refrigerat? Hæcce explicatio unice admittenda mihi videtur; etenim cum in conum obscurum flammæ candelæ virgam ferream mediocriter crassam eamque usque ad album calefactam horizontaliter immersi, conum obscurum magnâ ex parte evanescere, flammamque subito vividiorem fieri observavi : quo in-

dicatur vapores sevi conum obscurum constituentes, candente ferro, sat calefactos fuisse ut ignem ex parte conceperint; quod impossibile, si oxigenium in cono obscuro deficeret. Notandum vero istud phœnomenon instantaneum esse, quia virga ferrea calorem rubrum celeriter amittit; patet igitur conum obscurum in flammâ candelæ a frigore, quod vapores sevi nascentes continuo producunt, originem trahere; inde etiam major fit, cum, ellychnio crescente, sevi vapores copiosius evolvuntur; nec dubitandum quin ad conum hunc formandum frigor, substantiæ combustibilis volatilisatione productus, sufficiat, cum numquam flamma superficiem illius corporis tangat cujus vaporibus formatur, sed certo intervallo ab ipsâ semper remota maneat : præterea si calor ad combustionem determinandam sufficiens in cono obscuro adesset, pulvis tormentarius qui oxigenii athmospherici contactum, ad flagrandum, non requirit, in ipso comburi deberet, quod nullo modo fit. Objicietur fortasse hydrogenii flammam, aliasque ubi nulla fit volatilisatio, conum obscurum etiam exhibere; sed gazum in flammæ centrum continuo affluens frigus ibi producere debet, cùmque celeritate magnâ flammam ingrediatur, aërem athmosphericum plus minusve arcet a loco ubi in flammam prorumpit, impeditque sic ne in centro flammæ combustio rite peragatur : his autem ex causis conus obscurus in illis flammis produci debet, multo minor tamen quam in flammis liquidorum ac solidorum corporum, idque observatione comprobatur.

14. Si candelam accensam sibimetipsi relinquimus, quin superfluum ellychnium abscindamus, necessario hoc longius fit, quia in flammâ tantummodo incomplete comburitur (13) : simul major fit quæ tempore statuto consumitur sevi quantitas, flammæque calor ac lumen multum imminuuntur ; plures hujus phœnomeni causæ extant : primùm, auctâ ellychnii longitudine, augetur et ipsius massa quæ particulis carbonis e flammâ in illud depositis adhuc accrescit, et proinde hoc capite ellychnium flammam magis refri-

gerat; dein majorem, auctâ massâ, luminis flammæ copiam intercipit, aëremque fortius ab interiori flammâ arcet; demum cum majorem liquefacti sevi copiam admittat, major quoque hujus quantitas in vaporem abit; unde fortior sevi consumptio majusque productum frigus : ex his liquet intensitatem flammæ, aucto ellychnio, multum imminui, vaporesque sevi vel substantias in quas flammæ calore resolvuntur combustionem partim effugere debere : hinc fumus ille copiosus, quem candela, ellychnio non resecto, fundit.

COMBUSTIONIS CAUSÆ.

15. Expositis quæ corpora conflagrantia exhibent phœnomenis, de combustionis causis agamus. Demonstratum innumeris experimentis a celeberrimo Lavoisier fuit, recentiorumque chemicorum laboribus confirmatum, corpora omnia, non nisi initâ cum oxigenio combinatione, in aëre athmospherico comburi; combustionem, cessante hâc combinatione, sisti, oxigeniumque omnes fere combustiones alere, et proinde ut præcipuum combustionis agens posse considerari. Sed non oxigenium tantum, ut credidit Lavoisier, sed etiam chlorum quasdam alit combustiones. Neminem enim latet multas substantias hydrogenio imbutas in chloro conflagrare : sic candela accensa in hunc gazum immissa per aliquod tempus conflagrare pergit quia sevum hydrogenium continet, cujus cum chloro affinitas maxima est. Verum hoc in casu, omnia sevi elementa combustioni non inserviunt, quia chlorum pro carbone non sat magnam affinitatem habet. Hinc in aëre athmospherico, ubi totum fere sevum comburitur, multo intensior observatur flamma candelæ.

16. Combustio igitur a combinatione corporis cujusvis cum alio corpore et præsertim cum oxigenio dependet. Sed unde ex tali connubio caloricum et lumen emergunt? Quod ut intelligatur attendendum huic principio : *quotiescumque corpus, moleculis sibimet invicem propius admotis, in spatium minus contrahitur, calori-*

3.

cum semper emittit. Cum autem corpus quoddam cum oxigenio vel chloro sese combinat, propiores evadunt eorum moleculæ, et proinde caloricum emitti debet. Præterea si, ut ratione et experimentis quibusdam indicatur, lumen non nisi caloricum modificatum sit, facile intelligitur calorici emissi partem quamdam in lumen posse converti, hocque evenit cum corpus conflagrans adeo calefactum est ut radios calorificos eâ, quâ pollet lumen, refrangibilitate præditos emittat (*); et quidem, teste experientiâ, corpora tunc tantum lucida evadunt cum eorum temperatura 550 aut 600 graduum est. Inde perspicies cur multæ oxigenationes sine calorici et luminis emissione peragantur : caloricum enim sufficiente copiâ non semper evolvitur, ut corpora combustibilia calore rubro perfundantur. Quod autem condensationi quam oxigenium chlorumve et sæpe etiam corpus combustibile in combustione experiuntur, caloris et luminis emissio attribuenda sit, probant sequentia : 1°. Oxigenium et chlorum forti percussione in tubo vitreo condensata caloricum et lumen emittunt. 2°. Corpora combustibilia solida vel liquida etiam caloricum nec non lumen compressione emittere posse probavit Dessaignes. 3°. Quo major est corporum conflagrantium condensatio, eo, cæteris paribus, major calorici emissi copia, ut patet hydrogenii combustione. 4°. Quando condensatio fere nulla est, parum calorici sæpiusque nullum lumen emittitur. Sic cum oxigenium corpori solido infixum alii copori offertur et cum hoc combinationem, alterâ solutâ, init, nullum persæpe caloricum emergere cernitur. Hinc etiam intelligitur cur dum combinatio corporis combustibilis cum oxigenio lentissime peragitur, licet hoc in statu aëriformi sit, nullus qui percipi queat calor emittitur, ut in lentis metallorum oxidationibus cernere est. Hoc enim in casu pedetentim evolvitur caloricum,

(*) Vide commentationem meam de identitate luminis et calorici, in annalibus acad. leod. anni 1819-1820.

ita ut quod singulo temporis momento emittitur nimis parvum sit ut percipi queat. Non prætermittendum tamen quasdam esse combustiones quæ supradictam theoriam valide infirmare videntur : sic oxigenium cum carbone sese combinans non solum non statum aëriformem amittit, sed carbonem etiam hunc in statum trahit, licet calorici et luminis copia ingens evolvatur. Imo in pulveris tormentarii inflammatione oxigenium nitro infixum una cum carbone a solido ad aëriformem transit statum, copioso licet emisso calore. Quæ ut explicentur, supponit Bruguatelli gazum oxigenium cum corporibus quandoque sese combinare magnâ caloris sui parte servatâ, hocque tantum in casu posse combustionis phœnomenon producere, dum corpora illa deserens in alia feratur ac cum iis connubium ineat. Berzelius vero supponit corpora combustibilia et oxigenium in diverso electricitatis statu versari, et, cum uniuntur, electricitates oppositas neutralisari, eâque neutralisatione caloricum et lumen combustionis produci : sed cum hypotheses istæ phœnomenis non rite consonent, iis difficile creditur. Facilius crederetur, me sentiente, in connubio carbonis cum oxigenio, hujus moleculas ab illius moleculis minori distare intervallo, quam eo quo in utroque corpore segregato moleculæ integrantes, vel quo in acido nitrico potassæ infixo azoti et oxigenii moleculæ ab invicem distant, etiamsi acidum hocce acido carbonico densius sit; sed hæc densitas præcipue pendere videtur ex intervallo quod inter moleculas *integrantes*, minime vero ex illo quod inter *constituentes* moleculas intercedit. Cum igitur oxigenium nitrum derelinquens ut carboni uniatur, compositum efformat in quo moleculæ constituentes sibi invicem propiores sunt quam in acido nitrico, ut majori inter ipsas affinitate res indicatur, caloricum et lumen istâ combinatione evolvi posse credo, licet moleculæ integrantes novi compositi, ob debiliorem inter ipsas attractionem, ita inter se disponantur ut gazum efforment. Sic etiam condensationi tribui licet lumen et caloricum

quæ in carbonis aut in pulveris tormentarii combustione evolvuntur. Cum corpora aëriformia, pari massâ, multo plus calorici contineant quam corpora solida et liquida majoremque in combustione subeant condensationem, patet in combinatione oxigenii cum corpore solido, ab illo præcipue caloricum et lumen emissa procedere, dum in combinatione ejus cum aëriformi corpore, hoc etiam emissioni calorici contribuat; idque sane ratio est cur fluida elastica majorem, quam corpora solida, calorici copiam combustione emittant. (6)

Nota. Cum perpaucæ sint combustiones quæ alio gazo quam oxigenio aluntur, istæque nihil peculiare exhibeant, lectorem moneo de iis solum quæ ab oxigenio pendent, in posterum sermonem esse.

17. Quoniam combustio mutuum corporis combustibilis et oxigenii contactum requirit, sequitur corpus in aëre libero non posse conflagrare, nisi aër ipsum circumdans, simul ac oxigenium suum combustione amiserit, renovetur. Hæc autem renovatio ipsâ combustione determinatur. Aër enim corpori flagranti proximus calore recepto levior factus, statim superiora petit, ejusque in locum succedit aër frigidior puriorque, qui subinde etiam calefactus, suum æque locum puriori aëri occupandum ascendens cedit, hicque aëris fluxus, ut continuetur combustio necessarius, tam diu perdurat quam diu conflagrat corpus. Inde intelligitur cur candela accensa in tubo sat longo inferius clauso ad fundum usque demissa brevi extinguatur, impedito aëris circa flammam fluxu.

18. Vidimus ut corpus aliquod conflagret, necessario requiri ut cum oxigenio in contactu sit: verum hæc non unica conditio est ad ejus combustionem requisita. Debet insuper affinitate pro oxigenio sat magnâ gaudere, seu ad classem combustibilium, ut aiunt, corporum pertinere, sufficientique pollere temperaturâ. Cum igitur corporis combustibilis combustionem determinare volumus, illud cum oxigenio in contactu ponere, ejusque, quantum opus est, tempera-

turam augere debemus. Non tamen omnis corporis massa calefacienda, nec postquam conflagrare incepit, caloricum ad protrahendam combustionem ipsi adjungendum est, sufficit unam corporis partem ad temperaturam combustioni necessariam evehere; combustio tunc ab hâc parte incipit, et cum calor ab eâ evolutus partibus vicinis sese communicet, hæ eodem modo igne corripiuntur, combustioque ita propagabitur, totaque comburetur massa si caloricum emissum corpori flagranti temperaturam necessariam conservet. Si vero, ut fit in carbone segregato, calor productus justæ temperaturæ corpori servandæ impar sit, combustibili paulatim refrigerato, combustio cessabit; conjunctis autem pluribus carbonibus iisque ita dispositis ut aër per eorum intervalla fluere possit, caloricum combustione copiosiùs emittetur, aptâque temperaturâ combustibili servatâ, perget combustio.

19. Gaza combustibilia oxigenio mixta si uno in puncto inflammantur, combustionem instantaneam explosione stipatam subeunt; hujus phœnomeni rationem facile intelliget qui consideraverit gaza massâ infinite minori quam corpora solida pollere, majorem vero caloris copiam suâ combustione evolvere (6): hinc enim perspicitur caloricum puncto massæ incenso emissum sufficere posse ut totam massam ad eum temperaturæ gradum quo combustio ejus determinatur, subito evehat (*). In massâ nimis extensâ fieri tamen poterit ut solum misturæ partes puncto incenso proximæ hujus calore incendantur; sed cum caloricum illarum combustione evolutum reliquam massam subito inflammet, combustio totius massæ, licet non uno temporis momento peracta, insensibili tamen temporis spatio propter maximam celeritatem quâ per totam massam serpit ignis,

(*) Excipiantur gaza quæ calorem sat fortem combustione suâ non emittunt difficiliusque connubium ineunt. Sic azotum oxigenio mixtum in loco tantum in quo scintilla excitatur electrica comburitur; nullam enim exhibet explosionem, numerumque scintillarum fere infinitum requirit ut totum comburatur.

absolvitur, ideoque ut instantanea haberi potest. Cum autem calor tali combustione evolutus fortem ac celerem in massâ expansionem producat, fieri haud potest quin accedat explosio. Si calor puncto cuivis misturæ explosivæ admotus inflammationi producendæ impar est, sed lentam tamen combinationem misturæ procreare potest, caloricum minori emittitur dosi quam ut tota massa subito inflammetur, nec combustio instantanea, nec proinde explosio observatur; misturæ vero combinatio lente ac successive absque ullâ luminis evolutione peragitur : licet vero lentâ hacce combinatione non satis calorici evolvatur ut miscela lucida sit, fieri tamen poterit ut corpora firma, minori calore lucentia (6), in illam immissa, ardentia evadant; et revera Davy filum tenuissimum platini hoc modo calore rubro perfundi posse reperiit. (*)

20. Si misturæ explosivæ proportionibus rite determinatis factæ aliud misceatur gazum, ignisque dein illi admoveatur, facile conjicies quæ adventura sint; etenim si gazum alienum magnâ dosi mixturæ immistum est, non poterit hæc in puncto incenso solitâ cum intensione conflagrare, calorque istâ combustione evolutus debilissimus erit, sicut ille qui combustione in aëre vitiato peractâ producitur, nec proinde massæ explosivæ inflammandæ sufficiet, idque præcipue quod gazum superadditum permultum calorici fluido explosivo detrahat. Combustio igitur misturæ explosivæ, licet in puncto incenso fiat si ignis sat intensus ipsi apponitur uti ex supradictis (9) aliisque experimentis, de quibus postea (26), indicatur, non tamen ultra progredi poterit, cumque calor ac lux puncto massæ incenso evoluta, cum igne apposito sese confundant, mistura proprietate inflammabili omnino destituta apparebit; quod et experientia commonstrat. Ex dictis facile erues sequentia. 1°. Miscelæ explosivæ, quæ minimum ad conflagrandum calorem exposcunt, maximam fluidi elastici commiscendam copiam requirunt ut

(*) Ann. de chim. et de phys., tom. 4, p. 347.

explosio impediatur et vice versâ. Hoc experientia plane confirmat. 2°. Quo frigidius est gazum misturæ explosivæ immixtum, eo majorem habet cohibendæ explosionis vim. Sic aquæ bullientis vapor, testante Davy (*), majori copiâ adhiberi debet quam gaza frigida ut explosio impediatur. 3°. Quo densius est gazum misturæ additum, quove majorem pro calorico capacitatem gerit eo facilius explosionem cohibet. Hujus tamen regulæ quædam dantur exceptiones quæ ab ignotâ circumstantiâ pendere videntur. Sic protoxidum azoti quod triplò fere oxigenio densius est, capacitatemque pro calorico majorem habet, minori tamen, teste experientiâ, hydrogenii cum oxigenio miscelæ explosionem cohibendi virtute pollet. An hoc autem non proveniret ex eo quod oxigenium in protoxido azoti magis condensatum sit et proinde ad ineundam combinationem aptius? An ex eo quod melius caloricum ducendi virtute polleat? Quemadmodum misturæ explosivæ inflammatio gazi cujusvis admistione, ita etiam sufficienti per imminutam aëris pressionem (**) rarefactione impeditur. Hoc enim in casu æque ac in præcedenti imminuitur materiæ quantitas quæ in loco ubi ignis apponitur conflagrat, et proinde minor ab ipsâ evolvitur calor quam ut tota miscelæ massa inflammetur. Sed facile concipimus misturæ particulas rarefactione magis quam gazô superaddito ab invicem remotas esse debere ut inflammatio reddatur impossibilis, quia gazum istud præterquam quod particulas dispergat, eas etiam refrigerat : sic hydrogenii cum oxigenio miscela quæ, volumine per oxigenii additionem

---

(*) Ann. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 284.

(**) Calore enim quantumvis rarefacta miscela explosiva non modo non virtutem explosivam amittit, sed et inferiori temperaturâ explosionem subit, quod non mirum ; etenim mixturam calefactam pauciori ad conflagrandum egere calore docet ratio.

triplicato, virtutem explosivam amittit, octodecuplo rarior debet esse facta ne fiat explosio.

21. Corpora combustibilia solida vel liquida quæ infra temperaturam caloris rubri in vaporem abeunt, conflagrare nequeunt nisi in vapores reducta sint, quia caloricum ad combustionem eorum requisitum volatilisatione ipsis perpetuo detrahitur. Sic camphora, sevum, oleum, alcohol, etc. solummodo flammâ conflagrant; hæcque certâ distantiâ ab eorum superficie semper remota stat, propter magnam quam volatilisatio ibi latentem reddit calorici copiam : temperaturæ autem gradus quo corpora ista flammam concipiunt tam a facilitate quâ in vaporem abeunt quam ab eorum pro oxigenio affinitate dependet; et revera si perficimus ut corpus vapores majori copiâ exhalet, citius quoque, teste experientiâ, flammam concipiet; sic phosphorus in vacuo pneumatico positus, cum vapores copiosius emittat, quam sub atmosphæræ pressione, fortiori fulget luce, minorique indiget calore (quod et observavit Bellanni de Monza (*)) ut flammam fundat; ita quidem ut, si lanugine obducatur quo vaporum et caloris præsertim eorum combustione evoluti dispersus impeditur, ignem sponte in vacuo pneumatico concipiat, quod jucundissimum visu (**). Item mixtura (*alliage*) stamni et plumbi ferro ardenti in vacuo imposita, fumum emittit atque etiam flammam. Eadem autem mixtura in aperto aëre, propter atmosphæræ incumbentis pondus, ne fumum quidem qui visu percipi possit emittit. (***)

22. In corporibus quæ e combustibilibus et oxigenio aliis affixo substantiis constant quorumque calor novis combinationibus productus major est eo qui ad oxigenium vinculo chemicæ conjunc-

---

(*) Thenard, Traité de chimie, 2me. édition, tom. 1, pag. 175.

(**) *Vide* Annales de chimie, tom. 21, mémoire de Mr. Van-Marum.

(***) Newton, lectiones opticæ, quæst. 11.

tionis solvendum requiritur, combustio semel incepta absque aëris concursu continuatur. Sic in pulvere tormentario ex sulphure, carbone et nitro composito, cum nitrum oxigenium azoto et potassæ unitum abunde contineat, oxigeniumque ab his multo minori disjungatur calore quam qui suâ cum sulphure et carbone combinatione eruitur, patet grano uno pulveris calefacto, oxigenium a nitro grani separatum et in carbonem et sulphur delatum, hâc conbinatione caloricum vividissimum evolvere, quo, calefactis vicinis granis, oxigenium ab eorum nitro æque separatur et cum carbone et sulphure sibi proximis connubium init, sicque combustio per totam serpit massam. Notandum vero combustionem diversimode peragi secundum proportionem eorum qui pulverem componunt et modum quo miscela confecta sit. Si enim ista proportio combinationi oxigenii cum carbone et sulphure quam maxime apta misturaque homogenea sit, combustione fere instantaneâ tota pulveris massa, uno licet in puncto solum accensa, conflagrabit : cujus rationem facile comprehendet, qui parvâ pulverem ad conflagrandum egere temperaturâ, permagnam vero calorici quantitatem combinatione oxigenii cum carbone et sulphure evolvi consideraverit. Si vero pulverem componentium proportio minus perfecta, miscelaque minus intima sit, lentior erit combustio sæpeque nullâ explosione stipata.

MEDIA QUIBUS COMBUSTIO INTENSIOR REDDITUR.

23. Vidimus (18) ut corpus combustibile conflagrare possit, duo requiri ; nempe gazum combustioni sustentandæ aptum et calorem ad combustionem determinandam sufficientem. Hinc duplex combustionis augendæ methodus : vel oxigenium majori copiâ corpori flagranti suppeditandum, vel sufficiens calorici quantitas ipsi tum servanda, tum subministranda est. Pluribus autem modis oxigenium corpori flagranti exhibetur : sic 1°. directe in corpus conflagran dirigi potest quod follibus et calamis fit, quorum actio eo efficacior

quo oxigenium quod continent densitate majore gaudet, ac gazis alienis minus mixtum est. 2°. Indirecte in corpora ardentia oxigenium dirigitur, cum acceleratur aëris fluxus qui semper circa ipsa fit (17), et hoc medium ad flammarum intensitatem augendam præcipue adhibetur. Quæcumque igitur illi aëris fluxui favent ejusque celeritatem adaugent, combustionem intensiorem reddunt, eâque ratione utilitatem maximam exhibent tubi caminorumque spiracula quæ supra corpora flagrantia eriguntur : aër enim qui combustioni inservit, vapores fuliginosi et gaza combustione producta, calore quem a corporibus ardentibus acceperunt, dilatata et proinde aëre exteriori leviora facta, in his tubis ascendunt; ibique dispergi cum nequeant, columnam aëris calidi componunt, quo tubi brevi calefacti fluidis insequentibus calorem conservabunt, quem in aëre libero, ubi disperguntur, ascendentia subito amitterent. Duplex igitur hisce tubis vel caminorum spiraculis commodum inest : impediunt enim gazi calefacti fumique dispersum, nec calorem nec inde sequentem dilatationem iis auferunt, et proinde illa in columnam aëris calidi cogunt. Quæ columna aëre exteriori levior magnâ cum celeritate in prædictis tubis eâque majori quam in aëre libero, ob majorem temperaturam, ascendit; aër frigidus ac purus majori proinde copiâ tempore dato ad corpora combustibilia affluit, sicque eorum combustionem auget. Affluentis aëris celeritas cum tuborum longitudine crescit : ratione enim et experientiâ constat aëris in tubo ascendentis calorem ipsiusque proinde ascensionalem vim eo magis decrescere quo a corporibus conflagrantibus magis recedat, idque multo celerius in brevi quam in longo tubo fieri, quia in hoc aër ascendens tardius atmosphæræ temperaturam induit. Alia adhuc eaque multo pretiosiora commoda caminorum spiracula exhibent. Educunt enim gaza noxia, fumumque combustione producta, quæ in interiorem domum si irrumperent, aërem ibi vitiarent. Quam ob rem veteres quorum camini nullis instructi erant spiraculis, focos

in aperto aëre constituere debebant, cumque interiora cubicula calefacere desiderarent, utebantur focis portativis, in quibus substantias parum fumidas comburebant. Mox, vivente nempe Horatio, aperturas in apice ædificiorum supra focos construebant, quibus nonnisi incomplete erumpebat fumus. Hoc saltem indicare videntur isti Horatii versus :

> Sordidum flammæ trepidant rotantes
> Vertice fumum.
>
> Oda X, lib. IV.

Quamquam in Homero, Herodoto et Aristophane quædam caminorum spiraculis armatorum vestigia reperiantur, videtur tamen eorum inventionem a Senecæ temporibus computandam esse (*). Multum vero tum aberat ut eâ gauderent perfectione ad quam sæculo præterito ipsos adduxere Ganger, Franklin et Rumfort : sed missâ de caminorum spiraculis longiori narratione, hoc unum dicam, ea quæ super focos cameris calefaciendis inservientes posita sunt non solum ita disponi debere ut aëris circa ignem renovationi quam maxime faveant; sed insuper, ut impediant ne fumus refluat, ut majorem, quam combustioni opus est, aëris frigidi copiam in cameram non trahant, caloricumque, quantum fieri potest, eâ quæ igni incumbit superficie, in cubiculum reflectant. Physici formas hunc ad finem aptiores indicârunt, quas enarrare longius foret. Qui plura desiderat, consulat doctùm opus *Mécanique du feu*, 1713, *par Ganger*, eaque quæ de caminologiâ scripserunt Franklin, Rumfort et Clavelin.

3°. Alio adhuc modo potest oxigenium corporibus conflagrantibus, idque magnâ copiâ offerri; eorumque proinde combustio augeri; nempe si ipsis immisceantur substantiæ quæ oxigenium abunde

---

(*) Senecæ, epist. 70.

continent illudque facillime cedunt, ut nitrum vel chloras potassæ.

4°. Ultimus tandem combustionis, oxigenii ope, augendæ modus est, si corporum conflagrantium superficies, eâdem manente massâ, adaugetur. Inde enim puncta corporis numerosiora cum oxigenio in contactum veniunt, et proinde combustio, rapidior facta, caloricum abundantius evolvet, ideoque intensior erit. Sic flamma lampadis, cui forma conica est, quæque hoc capite plus minusve obstat quin aër sufficienti copiâ in interiora ejus penetret ut quidquid illic combustibile sit penitus comburatur, intensior fit minoremque fumi copiam fundit, cum, depresso ellychnio, illius superficies augetur.

24. Combustionis augendæ altera methodus in eo consistit ut corpora conflagrantia a frigore, quantum licet, defendantur et ut ipsis caloricum continuo subministretur. Sic si flamma mixturæ hydrogenii et oxigenii calamo Newmanni expressæ in corpora flagrantia dirigatur, eorum combustio mirum in modum augetur. Simili modo si calorem flammæ serves, imo augeas, lumen ab eâ emissum multo intensius erit. Physicos enim non latet clarissimum Rumfort, constructis lampadibus in quibus plura ellychnia plana situ parallelo posita flammisque operta semetinvicem a frigore tuentur, lumen produxisse sexaginta candelarum lumini æquale; nec lucis intensitatis quam hoc modo attingere possumus limites determinari posse putat; quod pharis utilissimum esse potest. (*) Ex dictis luculenter patet, combustionem, ut quam maxime intensa fiat, requirere ut, conjunctis unâ et alterâ methodo, tum oxigenii, tum calorici copia sat magna corpori flagranti exhibeatur. Id autem quodam modo in perfectioribus caminis ac lampadibus obtinet, quæ non solùm aëris fluxum circa combustibilia accelerant, sed et hisce calorem conservant. (**)

(*) Histoire de la 1re. classe de l'institut de France, an 1811.

(**) Ann. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 344.

MEDIA QUIBUS COMBUSTIO REPRIMITUR.

25. Expositis combustionis augendæ mediis, facile intelligetur quænam adhibenda sint ut reprimatur vel etiam ut omnino impediatur. Duplici viâ id fieri potest; vel corporibus flagrantibus contactu oxigenii privatis, vel eorum temperaturâ diminutâ. Aqua corporibus conflagrantibus injecta utroque modo combustionem reprimit. Aërem enim athmosphæricum ab eorum superficie arcet, et in vaporem abiens permagnam calori copiam ipsis detrahit. Quod liquidum cum tantâ ad reprimendam combustionem vi polleat facileque et sufficienti copiâ obtineatur, omni ævo ad extinguenda incendia præ cæteris mediis adhibitum fuit. Notandum vero aquam, si non eâ quantitate in combustibilia effunditur ut maximam ipsis calorici partem auferat, eorum combustionem augere potius quam reprimere, si corpora conflagrantia essent oxigenii avidissima, ut carbo, ferrum, etc. : his enim in casibus decomponeretur aqua, præberetque tum magnam oxigenii copiam, tum gazum maxime inflammabile quibus fieret intensior combustio : et revera observatum novissime est vaporem aquæ ex arcto tubo prosilientem plurium corporum combustionem, cum in ea dirigitur, augere (*); quod non nisi decompositione aquæ fieri potest, licet rem alio modo sese habere putet inventionis auctor Dana. Quin etiam fabri, quos non latet illa aquæ proprietas, pulvere carbonis humido utuntur cum ignem acerrimum producere cupiunt.

26. Media quibus corpora flagrantia contactu oxigenii privantur ad combustionem impediendam, hæc, veluti omnibus notissima, non describam (**). Quod vero ad frigus attinet, ejus in reprimendâ

(*) Annales générales des sciences physiques, t. 2.

(**) Cl. Gay-Lussac nuperrime reperiit linteum phosphate ammoniaci imbutum, igne apposito, non comburi; idque ideo fit, quod, caloris actione dispulso

combustione efficaciam multa exempla commonstrant, quorum mihi satis erit pauca referre. Corpora conflagrantia frigidis corporibus iisque magnæ massæ imposita extinguuntur priusquam eorum combustio in totum peracta sit (*); corporibus autem minus densis minorisque voluminis imposita omnino comburuntur. Flamma quoque frigore subito extingui potest; cum enim in ipsam frigidum immittitur corpus quod temperaturam illius infra gradum combustioni necessarium imminuit, flammam pallescere subito necnon extingui, cernitur. Ex frigoris actione repetenda quoque est ratio cur flamma telam metallicam sat strictam permeare nequeat et inter transeundum extinguatur. In universum flammæ multo celerius frigore extinguuntur quam corpora solida, quia minori massâ præditæ citius caloricum deperdunt. Si calor flammæ sufficienti copiâ ad eam extinguendam non subtrahitur, minus intensa solum apparebit multoque plus fumi fundet : sic si flamma candelæ per orificium ipsâ aliquantulo angustius transit, videmus non solum ejus dimensiones verum etiam calorem et lumen multum imminui, fumumque abundantem fundi, quod incompletæ combustionis signum: coarctato autem paululum orificio, flamma subinde supra illud extinguitur, licet sat calefactum sit ut ejus transitum vix impedire queat. Ratio hujus extinctionis simplicissima est. Imminutâ enim magnitudine flammæ, imminuitur calor ab eâ productus, ita ut frigori ab affluente aëre frigido caloricique radiatu inducto haud resistere queat (**). Quam ob rem eo minor reddi potest flamma quo

---

ammoniaco, acidum phosphoricum residuum substantiam combustibilem induat eamque ab aëris contactu defendat. Alia adhuc salia in eundem finem adhiberi posse expertus est cl. Hemptinne (*ann. gen. des sc. phys.*, *t.* 6, *p.* 168 *et suiv.*)

(*) Musschenbroeck, Traité de physique, t. 2, p. 423.

(**) In telâ metallicâ foraminum exiguitas flammæ combustioni non obstat, quia magnitudo flammæ inde non imminuitur.

minori ad conflagrandum calore indigeat. Sic, v. g. minor cum sulphure quam cum hydrogenio, hocque cum gazo minor quam cum oleo componi potest flamma. Hinc etiam intelligitur cur conus obscurus in quem superius flammæ candelæ segmentum abit, cum ab inferiori, telæ metallicæ ope, sejungitur, flammam vix concipiat, vel parvâ tantum cum intensitate, admoto igne, conflagret. Illud enim segmentum, si inflammatum esset, cum flammâ telæ subjacente in contactum non venit (10) ideoque ab ipsâ contra frigus non protegitur : adde ad hoc quod tela ipsa refrigeret, et proinde non sat altâ temperaturâ gaudebit flammæ segmentum ut combustione perfectâ conflagret. Simile exhibet phœnomenon candela in aëre vel vitiato vel rarefacto accensa. Defectus enim quantitatis sufficientis oxigenii primariam sed non immediatam candelæ extinctionis causam constituit : cum combustio hoc in aëre necessario incompleta sit, non satis calorici evolvitur ut fluidis combustibilibus temperatura ad propagandam combustionem necessaria servetur, hâcque ratione extinguitur flamma, ut experimentis allatis (9) luculenter patet. Ex eo etiam quod miscela explosiva, sive rarefacta, sive alii gazo mixta non satis caloris combustione suâ in puncto incenso evolvat, ratio habetur, cur non tota massa comburatur. Etenim calefactâ miscelâ ita ut minori calore ignem concipiat, inflammatio illius determinari potest. Sic Davy rarefactâ hydrogenii et oxigenii misturâ eo usque ut scintillâ electricâ non posset amplius inflammari, partem superiorem tubi gaza continentis calefecit donec vitrum mollescere inceperit, tuncque electricitate per miscelam transmissâ, observavit lumen debile haud longe in tubo sese extendens, ita ut sola gazi pars calefacta inflammari videretur. (*) Hoc experimento etiam patet miscelam explosivam, licet inflammationi concipiendæ impar sit facta, tamen in loco ubi ignis appo-

(*) Annal. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 267.

nitur debere conflagrare ut supra (20) dictum; idque etiam ex eo deduci posset quod gazorum combustibilitas rarefactione non imminuatur ut Davy reperiit (**). Plura adhuc notatu digna phœnomena ex frigoris in combustione reprimendâ actione procedunt; sic 1°. charta tenuis laminæ ferreæ apte applicata flammam, admoto igne, non concipit nisi ferrum contiguum temperaturam sat intensam acquisierit ut chartam suo calore incendere possit. 2°. Charta aquam continens sine ullo detrimento flammæ cuipiam applicatur, et aqua in ebullitionem rapi poterit, quin comburatur charta. Simili modo globus plumbeus linteo tenui apte involutus, appositâ flammâ, liquefit, quin linteum flammæ contiguum igne corripiatur. In omnibus hisce casibus cum charta vel linteum corpora tangant caloricum optime ducentia, quibus calor ad conflagrandum necessarius ipsis aufertur, combustio eorum peragi nequit, nisi ille, quo conflagrant, caloris gradus corporibus istis insit. Ast cum charta et linteum caloricum male ducant, magnam inter ignem et corpus refrigerans tenuitatem exhibere debent : aliàs enim eorum quæ igni proxima stat superficies comburi poterit, integrâ manente alterâ.

Proprietatem frigoris supra expositam consideranti in mentem poterit venire combustiones intensiores esse debere æstivo quam hiberno tempore : contrarium vero docet experientia hocque non mirum. Hieme enim aër densior est quam æstate, parique volumine majorem oxigenii quantitatem continet, et proinde combustioni alendæ aptior est.

(**) Annal. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 264.

THESES.

I.

Solutio imaginaria problematis impossibilitatis non semper signum.

II.

Methodus variationum ut mera calculi differentialis extensio haberi potest.

III.

Phœnomena electrica, galvanica necnon magnetica eidem principio adscribenda esse monstrat experientia.

IV.

Corporum colores non chemicâ eorum naturâ sed particularum tenuitate ac vi refringente dependent.

V.

Ebullitio ab evaporatione simplici multum differt : in illâ enim vapores ab omnibus massæ fluidæ punctis in universum procedunt; in hâc vero a superficie tantum.

VI.

Affinitatem chemicam ad attractiones electricas reduci posse haud puto.

VII.

Duo tantum oxida ferri admitti debent.

VIII.

Azotum et oxigenium in aëre atmosphærico non combinata sed permista tantum sunt.

IX.

Salium definitio, qualis in universum a chemicis datur, haud valet.

X.

Aërolithos e lunâ in terram esse missos hypothesis probabilior mihi videtur.

XI.

Substantiam simplicem in corpore organico vi vitali produci posse non credo.

XII.

Terram viâ humidâ ortum suum duxisse verisimillimum est.

FINIS.

N°. 98.